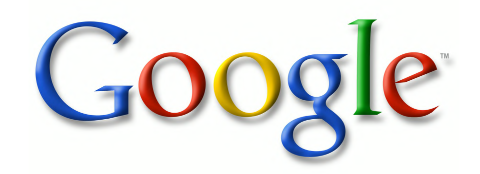
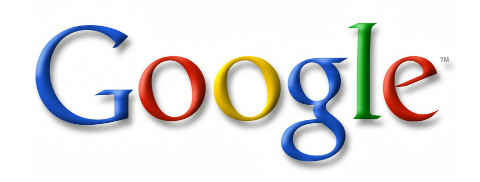

Google





OFE

Trincano

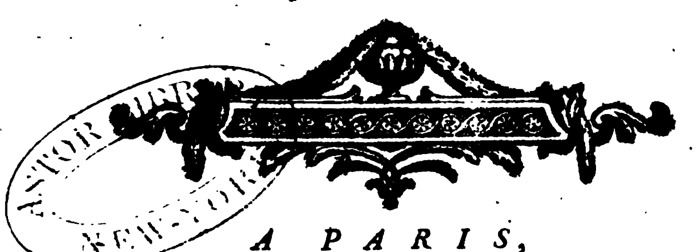
TRAITÉ
COMPLET
D'ARITHMÉTIQUE.

TRAITÉ
COMPLET
D'ARITHMÉTIQUE

A l'usage de l'Ecole Militaire de la Compagnie des Chevaux-Légers de la Garde Ordinaire du Roi, des Pages de la Chambre de Sa Majesté, de ceux de la Reine, de Monsieur, & de ceux de Monseigneur le Comte & de Madame la Comtesse d'Artois;

PAR M. TRINCANO,

Ingénieur Extraordinaire de Sa Majesté pour les Princes Etrangers, Professeur de Mathématiques & de Fortifications de l'Ecole Militaire de la Compagnie des Chevaux-Légers de la Garde Ordinaire du Roi, des Pages de la Chambre de Sa Majesté, de ceux de la Reine, de Monsieur, de ceux de Monseigneur le Comte d'Artois & de Madame la Comtesse d'Artois; Associé Etranger de l'Académie d'Angers.



A PARIS,

Chez { L. CELLOT, Lib. Imprim. pour les Mathématiques; le Génie & l'Artillerie, rue Dauphine; MUSIER, Libraire, quai des Augustins;

ET A VERSAILLES,

Chez BLAISOT, Libraire du Roi & de la Reine, rue Satory;

M. DCC. LXXXI.

Avec Approbation & Privilège du Roi.

AVERTISSEMENT.

MALGRÉ tous les soins qu'on a pris pour la correction de cet Ouvrage, en repassant exactement le manuscrit avant de le livrer à l'impression, & en faisant tirer régulierement deux épreuves de chaque feuille, & même plus lorsque les circonstances l'ont exigé, il s'est cependant glissé plusieurs fautes de calcul & de style. Ces fautes pourroient souvent rendre inintelligibles aux Lecteurs les endroits où elles se trouvent; on les prie de les corriger d'avance en consultant l'*errata*. Leur nombre, encore trop considérable, a prouvé à l'Auteur qu'un Ouvrage de cette nature imprimé avec moins de soins, loin d'être utile aux Etudians, seroit un véritable tourment pour eux: c'est pourquoi, voulant prévenir les contrefactions de son *Traité d'Arithmétique*, il avertit le Public que tous les Exemplaires de son Ouvrage seront signés au dos de la 2e planche par lui ou par son fils.



A MONSEIGNEUR CHARLES-PHILIPPE DE FRANCE, COMTE D'ARTOIS.

MONSEIGNEUR,

Quelle récompense plus glorieuse pouvois-je espérer de mes travaux, que la permission que vous daignez m'accorder d'en faire paroître quelques fruits sous les

OFE

Trincano

~~141 F 3~~

Trincand
UFE

TRAITÉ
COMPLET
D'ARITHMÉTIQUE.

de Trocs, celle pour tirer la tare des Marchandises, & enfin les Regles d'Alliage, dont je distingue trois especes, que je développe par des exemples qui en font sentir les différences & l'utilité.

Après la Regle d'Alliage, je traite de la Regle Conjointe si utile aux Commerçans, & sur-tout aux Banquiers, & j'en donne la démonstration.

Je traite aussi de la Regle de Fausse-Position simple & double, que j'enseigne d'une maniere peu connue, & je donne la démonstration de la méthode-pratique enseignée dans presque tous nos Traités d'Arithmétique.

Toutes ces regles étant expliquées, je passe aux progressions arithmétiques & géométriques, & j'applique leurs propriétés à la résolution de plusieurs problêmes intéressans & récréatifs.

L'union des deux especes de progressions me conduit à parler des logarithmes, dont je développe avec la plus grande étendue la formation & l'usage.

C'est par l'exposition des logarithmes que finissent la plupart des Traités d'Arithmétique; mais, ne voulant rien négliger, je n'en suis pas resté là, & je traite ensuite des combinaisons des nombres, tant complettes que simples, &, par occasion, j'en-

ſeigne à déterminer combien il y a d'ambes, de ternes, de quaternes & de quines dans la loterie royale de France; des nombres figurés ou ordinaux; des nombres polygones & de leur propriétés; de la ſuite des quarrés & des cubes, & de la maniere de trouver leurs ſommes; des quarrés magiques & de leur formation; des nombres premiers, & de la maniere de les déterminer; du nombre parfait & des nombres amiables; du calcul des expoſans, & enfin de l'arithmétique des infinis, que je développe d'une maniere ſimple, & dont j'indique les principaux uſages.

Je finis par appliquer les principes établis dans ce Traité à la réſolution d'un grand nombre de problêmes utiles & amuſans; tels que les queſtions relatives à l'affinage des métaux; tels que de trouver la valeur de la monnoie de France, des poids & meſures de Paris, en monnoies étrangeres, & en poids ou meſures dans le reſte du Royaume; tels que de faire un compte de retour d'un billet proteſté & payé par intervention, & à ce ſujet je traite de la maniere de tenir les livres de commerce, du change & de la banque; tels enfin que d'établir ſur des principes les ſpéculations de commerce. Je développe auſſi, en faveur des amateurs de la muſique, les pro-

priétés de la proportion & de la progression harmoniques.

J'ai mis à la suite de ce Traité un Mémoire sur *les logarithmes des quantités négatives*, que mon fils avoit composé avant que les circonstances le portassent à faire de l'étude des Loix, son objet principal. Comme il a développé dans ce Mémoire, tout ce qui a rapport à cette partie des Mathématiques, d'une maniere très-simple, & qui concilie, en quelque sorte, les différentes opinions des Savans sur les logarithmes des quantités négatives, j'ai cru qu'il seroit à sa véritable place dans un Traité complet d'Arithmétique.

Tel est le plan que je me suis tracé; & je crois que si j'ai pu parvenir à le bien remplir, il ne restera rien à desirer sur tout ce qui regarde le calcul numérique.



TABLE

TABLE DES TITRES

ET DES PRINCIPALES MATIERES,

Contenus dans ce Traité.

E R R A T A.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
123	16	2e 6pi,	2 [illegible]
57	7	184, quarré,	184.
Idem.	8	2116,	2116, quarré.
Idem.	18	144,	96.
Idem.	19	96,	144.
59	30	La 3e [illegible]	la 3e 5pi.
110	10	$5abc - 20a^2b^2$. Donc $= 20a^2b^2$,	$5abc = 20a^2b^2$. Donc $- 20a^2b^2$
190	22	La fraction à diviser,	la fraction diviseur.
196	12	Donc $12 = \frac{15 \times 9}{4}$	donc $12 = \frac{15 - 9}{[illegible]}$
207	9	$x = \frac{11 \times 5}{2}$,	$x = \frac{11 + 5}{2}$.
214.	17,22	De même espece,	de différente esp. (1).
Idem.	18,19, 23,27.	Terme qui est seul (au & le)	3e terme (au & le).
305	9	$\frac{[illegible]}{3} = l.z,$	$\frac{[illegible]}{[illegible]} = l.z.$
Idem.	11	Se transporter,	se transformer.
[illegible]	16	[illegible]	[illegible]
		$\times \frac{825}{1000} = \frac{45 \times 825}{1000}$	$\times \frac{825}{1000} = \frac{45 \times 825}{1000}$
Idem.	[illegible]	[illegible] 40,375 [illegible] 32,	= 40,375 [illegible] 40.
Idem.	18	Ajoutant 32,	ajoutant 40.
Idem.	19	on aura 6.989350,	on aura 6.989358.
Idem.	20	9575789,	9757895.
353	dre	$n = 0$	$n = 90.$
357	dre	$x = \frac{n.(n \times 1) \&c.}{2.3.4.5.6.7.8.9}$	$x = \frac{n(n+1) \&c.}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}$
373	12	$s^2 = \frac{[illegible]}{6}$	$s^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$
441	23	$\frac{22}{42}$,	$\frac{12}{52}$.
471	19	$2\frac{7}{5}$,	$2\frac{1}{5}$.

(1) Ou plutôt *voyez* la définition de la regle de Trois simple & inverse, donnée par Supplément, *page* 512.

APPROBATION.

J'Ai lu, par ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux, un Manuscrit intitulé : *Traité complet d'Arithmétique*, par M. Trincano. Cet Ouvrage m'a paru remplir fort bien son titre, par la variété des objets qui y sont traités ; & je le crois très-propre par sa clarté, à donner une connoissance parfaite de toute cette partie des Mathématiques. C'est pourquoi je pense qu'il mérite d'être reçu favorablement du Public. A Versailles, le 16 Mars 1781.

Signé, MONTUCLA, *Censeur Royal.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé le Sieur TRINCANO, Ecuyer, notre Ingénieur Extraordinaire auprès des Princes étrangers, Professeur de Mathématiques & de Fortifications à l'Ecole Royale des Chevaux Légers de notre Garde ordinaire, Maître des Mathématiques des Pages de notre Chambre, de ceux de notre très-chere Epouse la Reine, de notre très-cher Frere Monsieur le Comte d'Artois, &c. nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage de sa composition, intitulé : *Traité d'Arithmétique* ; s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege à ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de

le vendre, faire vendre par tout notre Royaume. Voulons qu'il jouiſſe de l'effet du préſent Privilege, pour lui & ſes hoirs à perpétuité, pourvu qu'il ne le rétrocede à perſonne; & ſi cependant il jugeoit à propos d'en faire une ceſſion, l'acte qui la contiendra ſera enregiſtré en la Chambre Syndicale de Paris, à peine de nullité, tant du Privilege que de la ceſſion; & alors, par le fait ſeul de la ceſſion enregiſtrée, la durée du préſent Privilege ſera réduite à celle de la vie de l'Expoſant, ou à celle de dix années, à compter de ce jour, ſi l'Expoſant décede avant l'expiration deſdites dix années. Le tout conformément aux articles IV & V de l'Arrêt du Conſeil du 30 Août 1777, portant réglement ſur la durée des Privileges en Librairie. Faiſons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire leſdits Ouvrages, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant ou de celui qui le repréſentera, à peine de ſaiſie & de confiſcation des exemplaires contrefaits, de ſix mille livres d'amende, qui ne pourra être modérée, pour la premiere fois, de pareille amende & de déchéance d'état en cas de récidive, & de tous dépens, dommages & intérêts, conformément à l'Arrêt du Conſeil du 30 Août 1777, concernant les contrefaçons. A la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en beau papier & beau caractere; conformément aux Réglemens de la Librairie, à peine de déchéance du préſent Privilege: qu'avant de l'expoſer en vente, le manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le Sieur HUE DE MIROMENIL, Commandeur de nos Ordres; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le ſieur

[redacted] reconnoître la vérité de ce qu'on avance.

Problême, est une proposition où il s'agit de faire quelque chose, & de démontrer qu'on a fait ce qu'on s'étoit proposé.

Lemme, est une proposition qui prépare la démonstration d'autres propositions auxquelles elle ne paroît pas avoir de rapport.

Corollaire, est une conséquence qu'on déduit d'une proposition.

Scholie, est proprement une remarque.

Une proposition est l'*inverse* ou la *converse* d'une autre, lorsqu'on prend pour hypothese, la conséquence qu'on a déduite dans cette autre proposition, & qu'il s'agit d'en démontrer la supposition.

Démonstration, est un raisonnement clair qui contient la preuve invincible de la vérité d'une proposition.

DEF. On appelle équation l'égalité de deux grandeurs simples ou composées. On les sépare par le signe d'égalité $=$; celle qui précede le signe est le *premier membre* de l'équation, celle qui le suit est le *second membre*; dans l'équation $a + b = c + d + x$, $a + b$ est le premier membre qui est composé de deux termes, c'est-à-dire, de deux quantités distinguées l'une de l'autre, savoir a, & b; $c + d + x$ est le second membre de l'équation qui a trois termes c, d & x; dans l'équation $12 = 7 + 5$, 12 est le premier membre, & $7 + 5$ est le second, qui a deux termes 7 & 5.

EXPLICATION DES SIGNES

ET DES ABRÉVIATIONS

dont on fera usage.

$=$ Est le signe d'Egalité, $a = b$ veut dire que la grandeur exprimée par a est égale à celle exprimée par b.

$+$ *Plus*, $a + b$ veut dire a plus b ou que la grandeur a est ajoutée à la grandeur b; de même $7 + 5 = 12$ indique que 7 doit être ajouté à 5; ainsi $+$ est le signe de l'addition.

$-$ *Moins*, $a - b$ veut dire a moins b, ou cela indique que la grandeur b doit être ôtée de la grandeur a; c'est le signe de la soustraction.

$\times$ veut dire *multiplié par*; $a \times b$ ou $a . b$ désigne que la grandeur a est multipliée par la grandeur b; de même pour indiquer la multiplication de 6 par 8, on écrit 6×8 ou $6 . 8$.

$*$ veut dire *divisé par*; $a * b$, ou $\frac{a}{b}$ sont deux expressions qui indiquent chacune que la grandeur a doit être divisée par la grandeur b. De même, pour marquer que 6 doit être divisé par 3, on écrit $6 * 3$, ou $\frac{6}{3}$.

$>$ *plus grand que*, $a > b$ veut dire que la quantité a est plus grande que la quantité b.

$<$ *plus petit que*, $a < b$ veut dire que a est plus petit que b.

Ce signe indique donc en général que la quantité qui est du côté de l'ouverture est plus grande que celle qui est du côté de la pointe.

: *eſt à*, *a* : *b* ſignifié *a* eſt à *b*.

: : *Comme*, *a* : *b* : : *c* : *d*, veut dire que *a* eſt à *b* comme *c* eſt à *d*, ou que *a* contient *b* autant de fois que *c* contient *d*; c'eſt l'expreſſion d'une proportion géométrique dont on parlera dans la ſuite.

∴ Ce ſigne trois points veut dire *arithmétiquement comme*; 11 : 9 ∴ 5 : 3. On prononce 11 eſt à 9 arithmétiquement comme 5 eſt à 3, ou 11 ſurpaſſe 9 comme 5 ſurpaſſe 3.

÷ C'eſt le ſigne de la progreſſion arithmétique; il indique que les grandeurs qui le ſuivent ſe ſurpaſſent également.

∺ C'eſt le ſigne de la progreſſion géométrique; il indique que les grandeurs qui le ſuivent ſe contiennent également.

Dém.	Démonſtration.
A dém. que.	A démontrer que.
Addit.	Addition.
Souſt.	Souſtraction.
Mult.	Multiplication.
Div.	Diviſion, diviſeur, diviſant.
Subſt.	Subſtituant.
Ant.	Antécédent.
Som.	Somme.
Semb.	Semblable.
Conſéq.	Conſéquent, conſéquemment.
Alt.	Alternant.
Déf.	Définition.
Ax.	Axiome.
Prob.	Problême.
Théor.	Théorême.
Lem.	Lemme.
Cor.	Corollaire.

(Cal. 6), ou (Arith. 6) exprime qu'on doit consulter l'article 6 du calcul ou de l'arithmétique.

Cal.	Calcul.
Art.	Article.
C. Q. F. D.	Ce qu'il falloit démontrer.
C. Q. F. Dét.	Ce qu'il falloit déterminer.
C. Q. F. B. R.	Ce qu'il faut bien remarquer.

Fin de l'Explication des Signes.

TRAITÉ



TRAITÉ
COMPLET
D'ARITHMÉTIQUE.

1. DÉFINITION. L'ARITHMÉTIQUE est la ſcience des nombres ; elle ſe diviſe en *théorique* & *pratique*.

La théorique conſidere les propriétés des nombres.

L'Arithmétique pratique met en uſage les regles que preſcrit la théorique.

2. DÉF. L'*unité* eſt ce qui ſert de meſure aux quantités dont il eſt queſtion ; ou c'eſt ce qui conſtitue un *tout* que l'on conſidere comme indiviſible, quoiqu'on puiſſe réellement le diviſer, comme un écu, une toiſe, une armée, &c.

On conſidere deux ſortes d'unités, l'une *concrete*, & l'autre *abſtraite*. L'unité eſt *concrete* ou *déterminée*, lorſqu'elle eſt appliquée à quelque choſe : un homme, un écu, une maiſon ſont des unités déterminées ou concretes ; l'unité eſt

abstraite, *absolue* ou *indéterminée*, lorsqu'elle ne désigne pas un objet particulier, comme un, une, &c.

3. DÉF. On appelle *nombre*, l'assemblage de plusieurs unités; on distingue aussi deux sortes de nombres, l'un *concret*, l'autre *abstrait* : quand je dis *vingt-cinq hommes*, j'énonce un nombre concret, & quand je dis *vingt-cinq*, j'énonce un nombre abstrait.

1°. Le nombre est *composé* ou *complexe*, lorsqu'il renferme des unités de différens noms ou valeurs; mais qui peuvent se réduire à la même espece, comme *trente-sept toises trois pieds six pouces ; quatre livres cinq sols huit deniers.*

2°. Le nombre est *simple* ou *incomplexe* ou *entier*, lorsqu'il ne renferme que des unités de même nom ou de même espece, comme *vingt-quatre hommes*, *soixante-huit fois mille*, *&c.*

3°. Le nombre est *rompu*, ou *fractionnaire*, ou *fraction*, lorsqu'il représente une ou plusieurs parties égales de l'unité, comme une *demi-aune*, *deux tiers d'écu*, *quatre cinquiemes de toise*, *onze trentiemes*. On voit qu'une fraction est exprimée par deux nombres: le second est le *dénominateur ;* il exprime le nombre des parties dans lesquelles l'entier dont on parle est divisé: le premier est le *numérateur ;* il exprime le nombre des parties que l'on a ou que l'on prend de cet entier. Dans la fraction *neuf vingtiemes* de toise, *vingt* est le *dénominateur*, & *neuf* le *numérateur*, ce qui indique qu'on a neuf parties de la toise, divisée en vingt parties égales.

4. L'Arithmétique n'emploie que dix *caracteres* ou *chiffres* pour exprimer tous les nombres possibles ; les voici avec leurs noms au-dessus :

Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, zéro.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Le zéro ne signifie rien par lui-même, mais il rend dix fois plus grandes les unités des chiffres qui le précedent; ainsi cette expression:

10 vaut dix, ou dix unités, ou une dixaine.
20 . . . vingt, ou deux dixaines.
30 . . . trente, ou trois dixaines.
40 . . . quarante, ou quatre dixaines.
50 . . . cinquante, ou cinq dixaines.
60 . . . soixante, ou six dixaines.
70 . . . soixante & dix, ou septante, ou sept dixaines.
80 . . . quatre-vingt, ou huitante, ou octante, ou huit dixaines.
90 . . . quatre-vingt-dix, ou nonante, ou neuf dixaines.
100 . . . cent, ou dix dixaines (1).

De la Numération & des Décimales.

5. DÉF. La numération est l'art d'exprimer, à l'aide des dix caracteres ou chiffres ci-dessus, toutes sortes de nombres; pour cet effet, lorsque plusieurs chiffres sont écrits de suite, le premier allant de droite à gauche représente des unités, celui qui le précede représente autant de dixaines qu'il vaut d'unités; le troisieme vaut autant de centaines; le quatrieme, autant de mille; le cinquieme, autant de dixaines de mille, ainsi de suite, suivant le rang qu'il occupe, comme on le voit dans la table suivante.

(1) On laisse aux Maîtres le soin d'enseigner aux jeunes Eleves à prononcer les nombres intermédiaires entre l'unité & cent, & depuis cent jusqu'à mille & au-dessus.

9, 785, 643, 201, 804, 927, 850, 273.

Sextillions.
Centaines de quintillion.
Dixaines de quintillion,
Quintillions,
Centaines de quatrillion.
Dixaines de quatrillion,
Quatrillions,
Centaines de trillion.
Dixaines de trillion,
Trillions,
Centaines de billion.
Dixaines de billion,
Billions,
Centaines de million.
Dixaines de million,
Millions,
Centaines de mille.
Dixaines de mille,
Mille,
Centaines.
Dixaines,
Unités,

On exprime ce nombre ainsi : neuf sextillions, sept cens quatre-ving-cinq quintillions, six cens quarante-trois quatrillions, deux cens un trillions, huit cens quatre billions, neuf cens vingt-sept millions, huit cens cinquante mille, deux cens soixante & treize. On n'a point prononcé de dixaines de trillion, de dixaines de billion, ni d'unités de mille, parce que ces rangs sont occupés par des zéros. Après cet exemple, il sera facile, avec un peu d'attention, d'exprimer en chiffres un nombre quelconque, comme trente mille vingt ; on voit qu'il y a trois dixaines de mille, point d'unités de mille, point de centaines, deux dixaines & point d'unités : il faut donc mettre des zéros aux rangs où il n'y a ni mille, ni centaines, ni unités ; on écrira donc 30020. De même pour exprimer en chiffres sept cens deux mille trente, on écrira un 7 au rang des cent mille, un zéro au rang des dix mille, un 2 au rang des mille, un zéro au rang des centaines, un 3 au rang des dixaines, & un zéro au rang des unités ; on écrira donc 702030, & ainsi des autres.

6. Une fraction s'exprime par deux nombres écrits l'un sur l'autre, & séparés par un trait : trois quarts s'écrit ainsi $\frac{3}{4}$; de même pour exprimer onze quinziemes de toise, on écrit $\frac{11}{15}$, ce

qui indique qu'on a onze parties de la toise, divisée en 15 parties égales ; on voit que si on augmente le dénominateur, sans rien changer au numérateur, on diminue la fraction : il est clair que $\frac{1}{3}$ est plus grand que $\frac{1}{4}$, & que $\frac{1}{4}$ est plus grand que $\frac{1}{9}$; au contraire la fraction devient plus grande, si on augmente le numérateur sans augmenter le dénominateur : ainsi la fraction $\frac{3}{8}$ est plus petite que $\frac{5}{8}$, &c. Lorsque le numérateur est égal au dénominateur, la fraction vaut un entier, $\frac{6}{6}$ d'écu valent un écu ; de même $\frac{7}{7} = 1$, parce qu'on a sept parties d'un tout qui n'a que 7 parties : on a donc un tout, fondé sur cet axiome, que le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble. Il est bon de faire observer aussi que lorsqu'on voit cette expression $\frac{2}{5}$ d'aune ou de toise, ou d'une quantité quelconque, on doit entendre deux fois la 5e partie d'une aune, d'une toise, &c.

7. *Principe.* 1°. On n'augmente ni ne diminue la valeur d'une fraction, si on double, triple ou quadruple, &c. les deux termes, ou si on en prend la moitié, le tiers, le quart, la centieme partie, &c. ; ainsi $\frac{3}{4} = \frac{36}{48}$, parce que 3 contient 3 fois le quart de 4, comme 36 contient 3 fois le quart de 48 ; de même si on prend la huitieme partie des termes de la fraction $\frac{16}{24}$, on aura $\frac{2}{3}$, qui est la même chose que $\frac{16}{24}$; car 16 sont les deux tiers de 24, comme deux sont les deux tiers de 3.

2°. On double, triple, &c. une fraction, si on en double, triple, &c. le numérateur. Par exemple, si on double ou triple le numérateur de la fraction $\frac{2}{9}$, on aura $\frac{4}{9}$, double de $\frac{2}{9}$, ou $\frac{6}{9}$, triple de $\frac{2}{9}$. On doit concevoir aussi facilement

que $\frac{4}{9}$ ſont doubles de $\frac{2}{9}$, que l'on conçoit que 4 écus ſont doubles de 2 écus, &c.

3°. Si on double, triple, &c. ſeulement le dénominateur d'une fraction quelconque $\frac{3}{4}$, on aura une fraction qui ne ſera que la moitié, le tiers, &c. de la fraction propoſée $\frac{3}{4}$; il eſt clair que le huitieme d'un louis d'or n'eſt que la moitié du quart d'un louis, ainſi $\frac{3}{8}$ d'un louis ſont la moitié de $\frac{3}{4}$ d'un louis. D'ailleurs, il eſt évident que ſi on double, triple, quadruple, &c. le nombre des parties d'un tout, on rend chacune de ces parties deux fois, trois fois, cinq fois plus petite, &c (1).

8. DÉF. On appelle *décimales* la numération continuée au-deſſous de l'unité, c'eſt-à-dire, que ſi un chiffre repréſente des unités, & qu'on le ſépare par une virgule des chiffres qui ſont à ſa droite, le premier chiffre après la virgule repréſente des dixiemes d'unités ; le ſecond, des centiemes ; le troiſieme, des milliemes ; le quatrieme, des dix milliemes ; le cinquieme, des cent milliemes ; le ſixieme, des millioniemes ; le ſeptieme, des dix millioniemes, ainſi de ſuite : enſorte qu'une unité d'un rang vaut toujours dix unités du rang à droite. Si on veut donc exprimer trois entiers & deux mille quatre dix milliemes, on écrira 3,2004 ; on prononce trente-deux mille quatre dix milliemes, ou trois entiers deux dixiemes & quatre dix milliemes ; la premiere expreſſion eſt la plus en uſage. Si on propoſe d'exprimer trois milliemes, on écrit 0,003 ; on met un zéro au rang des unités, un zéro au

---

(1) Les Maîtres doivent, par des exemples ſenſibles, rendre ces principes & ces notions familiers aux Ecoliers. On traitera plus amplement des fractions dans la ſuite de cet Ouvrage.

rang des dixiemes, un zéro au rang des centiemes, & un 3 au rang des milliemes : de même pour exprimer trois millions quatre mille neuf cens soixante & treize cent-milliemes, on écrit 30,04973 ; on doit donc écrire le nombre comme s'il n'y avoit point de décimales, & placer la virgule au rang qu'exige la dénomination. Comme dans cet exemple, il s'agit de cent-milliemes, il faut qu'il y ait cinq chiffres après la virgule ; on voit donc que si la dénomination désignoit des dixiemes, il faudroit un chiffre après la virgule, les centiemes en exigeroient deux ; les milliemes, 3 ; les dix milliemes, 4 ; les cent milliemes, 5 ; les millioniemes, 6 ; les dix millioniemes, 7, ainsi de suite. On voit donc en général que les décimales ne sont autre chose que des fractions, dont le dénominateur est l'unité, suivie d'un ou de plusieurs zéros, & qu'on supprime, parce que la virgule en tient lieu ; ensorte que $\frac{34}{1000} = 0{,}034$; de même $\frac{389}{100} = 3{,}89$; $\frac{3}{10} = 0{,}3$ $= 0{,}3000$; car $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000} = \frac{3000}{10000}$, & $\frac{3000}{10000} = 0{,}3000$. On voit donc qu'on peut écrire à la suite d'un nombre qui a des décimales, autant de zéros qu'on voudra, sans augmenter la valeur de ce nombre ; ainsi $3{,}8 = 3{,}80 = 3{,}800$ $= 3{,}8000$, &c. ; car chacune de ces expressions représente toujours 3 entiers, 8 dixiemes, point de centiemes, point de milliemes : il est donc clair que 38000 dix milliemes, est la même chose que trente-huit dixiemes, &c. Ajoutons que puisque dans les décimales, comme dans les nombres entiers, une unité d'un rang vaut dix unités du rang immédiatement à droite ; il s'ensuit, 1°. que si on avance la virgule d'un rang vers la droite, on rend le nombre dix fois plus grand :

ainsi 34,67 est dix fois plus petit que 346,7, puisque le premier ne représente que des centiemes & le second des dixiemes: or un dixieme vaut dix centiemes; 2°. que si on avance la virgule d'un rang vers la gauche, on rend le nombre dix fois plus petit; 3,467 est dix fois plus petit que 34,67; le premier de ces nombres ne présente que des milliemes, le second que des centiemes: or un centieme vaut dix fois un millieme. On prouve de même que si on avance la virgule vers la droite de deux rangs, on rend le nombre cent fois plus grand; si on l'avance de trois rangs, on rend le nombre mille fois plus grand; & au contraire, on rend le nombre cent fois, mille fois, dix mille fois plus petit si on avance la virgule vers la gauche de deux, de trois, de quatre rangs; 489,512 est cent fois plus petit que 48951,2, & celui-ci est dix mille fois plus grand que 4,89512, &c (1).

9. DÉF. On appelle *raison* ou *rapport* le résultat de la comparaison que l'on fait d'un nombre à un autre de même espece, ou considéré comme tel. Le rapport est de deux especes: il est *Arithmétique*, si on considere de combien un nombre surpasse un autre nombre, ou en est surpassé. Il est *Géométrique*, si on considere combien de fois un nombre contient un autre nombre, ou y est contenu: le nombre que l'on compare est l'*antécédent*, celui auquel on le compare est le *conséquent*. Dans le rapport arithmétique de 12 à 3, 12 est l'antécédent, 3 est le conséquent, & 9 qui exprime de combien 12 surpasse 3, est la

(1) Les Maîtres doivent rendre ces notions sur les décimales familieres aux Ecoliers. Les propriétés des décimales seront développées dans la suite de cet Ouvrage.

différence ou la *raison arithmétique* de 12 à 3. On exprime ainsi ce rapport 12 — 3 = 9.

Dans le rapport géométrique de 12 à 3, 12 est l'antécédent, 3 est le conséquent, & 4 qui exprime combien de fois 12 contient 3, est la *raison géométrique* de 12 à 3. On exprime ainsi ce rapport 12 : 3, ou $\frac{12}{3} = 4$.

10. DÉF. Des rapports arithmétiques sont égaux, lorsque les antécédens surpassent également leurs conséquens, ou en sont également surpassés. La comparaison de deux rapports arithmétiques égaux, forme une proportion arithmétique. On l'exprime ainsi 7 : 9 ⁚ . 12 : 14; on prononce 7 est à 9 arithmétiquement comme 12 est à 14, ou 7 est surpassé par 9 comme 12 l'est par 14; le premier & le quatrieme termes sont les *extrêmes*; le second & le troisieme, les *moyens*; le premier & le troisieme sont les antécédens; le second & le quatrieme, les conséquens.

Une suite de nombres qui se surpassent également, forme une progression arithmétique croissante, si les termes vont en augmentant, ou décroissante, s'ils vont en diminuant: la progression arithmétique s'exprime ainsi . . . .

÷ 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c.

ou ÷ 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0.

Le premier de ces deux exemples est celui d'une progression arithmétique croissante, dont la différence est 2; le second exemple est celui d'une progression arithmétique décroissante, dont la différence est 3.

11. DÉF. Des rapports géométriques sont égaux, lorsque les antécédens contiennent également leurs conséquens, ou y sont également contenus. La comparaison de deux rapports géo-

métriques égaux forme une *analogie* ou une *proportion géométrique*; on l'exprime ainsi, 12 : 3 :: 8 : 2, on prononce 12 est à 3 comme 8 est à 2, ou 12 contient 3 comme 8 contient 2; 12 & 2 sont les extrêmes, 3 & 8 les moyens; 12 & 8 sont les antécédens, 3 & 2 les conséquens.

Une suite de nombres qui se contiennent également, forme une progression géométrique. Elle est croissante, si les termes vont en augmentant, ou décroissante, si les termes vont en diminuant. La progression ∺ 3, 6, 12, 24, 48, 96, &c. dont la raison est 2, est croissante. La progression ∺ 243, 81, 27, 9, 3, 1, &c. dont la raison est 3, est décroissante (1).

12. Nous allons à présent faire connoître les différentes especes d'unités qui sont en usage; leurs parties & les caracteres ou signes qu'on emploie pour les désigner.

Pour les Monnoies.

₶, *signifie*	livre.	1 livre *vaut*	20	sols.
f.	sol.	1f.	12d	deniers.
d.	denier.	1d.	12′	primes.
′.	prime.	1′.	12″	secondes.
″.	seconde.	1″	12‴	tierces.
‴.	tierce.	1‴	12IV	quartes, &c.

Pour les Poids.

℔ *signifie* poids d'une livre.	1℔ *vaut*	2	marcs.
M. ou m. marc.	1m. . . .	8	onces.
O. ou ℥. once.	1o. . . .	8	gros.
G. ou ʒ. gros.	1g. . . .	3	deniers.
D. ou ℈. denier ou scrupule	1℈ . . .	24	grains.
g. . . . . grain.	1g. est le poids d'un grain de bled.		

(1) Ces notions sont nécessaires pour n'être point arrêté

Pour l'étendue des lignes.

T. ou t. *signifie* toise.	1^t. *vaut* 6 pieds.
P. ou pi. . . . . pied.	1^{pi}. . . . 12 pouces.
P. ou po. . . . pouce.	1^{po}. . . 12 lignes.
l. . . . . ligne.	1^l. . . . 12 points ou primes.
p^t. ou ′ . . . . point ou prime.	1′ . . . 12″ secondes.
″ . . . . seconde.	1″ . . . 12‴ tierces.
‴ . . . . tierce.	1‴ . . . 12^{IV} quartes, &c.

Pour l'étendue en surface.

TT. ou tt. *signifie* toise quarrée ; 1 toise quarrée vaut 6 pieds de toise quarrée, ou 36 pieds quarrés.

TP. ou tp. signifie toise pied ; 1^{tp}. vaut 6 pp. ou 6 pieds quarrés.

TP. ou tp. sign. toise pouce ; 1^{tp}. vaut 72 pouces quarrés ou $\frac{1}{2}$ pp. ou $\frac{1}{2}$ pied quarré.

Tl. ou tl. sign. toise ligne ; 1^{tl}. vaut 6 pp. ou 864 lignes quarrées.

Tp′ ou tp′ sign. toise point ; 1^{tpt}. vaut $\frac{1}{2}$ pp ou 72 lignes quarrées.

PP. . . pied quarré ; 1 pp. . . 144 pouces quarrés.

PP. . . pouce quarré ; 1 pp. . . 144 lignes quarrées.

ll. . . ligne quarrée ; 1 ll. . . 144 points quarrés.

p^tp^t. . . point quarré ; 1 p^tp^t. . . 144″ quarrées.

Pour l'étendue en solidité.

1^{TTT}. ou ^{ttt}. *signifie* toise cube, ou 6 pieds de toise cube, ou 216 pieds cubes.

1^{TTP}. ou ^{ttp}. vaut 36 pieds cubes : le pied cube vaut 1728 pouces cubes.

---

dans le développement des regles de l'Arithmétique. On traitera ensuite plus au long des propriétés des proportions & progressions Arithmétiques & Géométriques.

1^{TTP}. ou ^{ttp}. ſignifie 3 pieds cubes : on prononce une toiſe toiſe pouce.

1^{TTl}. ou ^{ttl}. ſignifie une toiſe toiſe ligne, & vaut $\frac{1}{4}$ de pied cube, ou 432 pouces cubes.

$1^{TTP'}$. ou $^{ttp'}$ ſignifie 36 pouces cubes : on prononce une toiſe toiſe point.

$1^{TTP''}$. une toiſe toiſe ſeconde vaut 3 pouces cubes: le pouce cube vaut 1728 lignes cubes.

$1^{TTP'''}$. une toiſe toiſe tierce vaut $\frac{1}{4}$ de pouce cube, ou 432 lignes cubes.

1^{TTPIV}. une toiſe toiſe quarte vaut 36 lignes cubes.

1^{TTPV}. une toiſe toiſe quinte vaut 3 lignes cubes : la ligne cube vaut 1728 points cubes, &c.

Pour le Tems.

J. *ſignifie* jour,	un jour *vaut* 24 heures . . . 24^{H}.
H . . . heure,	une heure . . 60 minutes . . $60'$.
$'$ . . . . minute,	une minute . 60 ſecondes . . $60''$.
$''$ . . . ſeconde,	1 ſeconde . . 60 tierces . . . $60'''$.
$'''$ . . . tierce,	1 tierce . . . 60 quartes . . . 60^{IV}.
IV . . quarte,	1 quarte . . 60 quintes . . . 60^{V}.
V . . . quinte,	1 quinte . . . 60 ſextes . . . 60^{VI}.
VI . . ſexte,	1 ſexte . . . 60 ſeptiemes . 60^{VII}, &c.

L'année contient 12 mois, le mois 30 jours, l'année 365 jours; pour les troupes 360 jours.

Pour la circonférence du cercle.

Deg. ou ° *ſignifie* degré; toute circonférence de cercle a 360 degrés ou 360°.

1 deg. *vaut* 60 minutes . . $60'$.
$1'$ . . . . . 60 ſecondes . . $60''$.
$1''$ . . . . . 60 tierces . . . $60'''$.
$1'''$ . . . . . 60 quartes . . . 60^{IV}.
1^{IV} . . . . . 60 quintes . . . 60^{V}.

$4^{\circ}, 2', 7'', 3''', 8^{IV}$, désigne quatre degrés, 2 minutes, 7 secondes, 3 tierces, 8 quartes.

13. En Géographie & en Astronomie, une portion de circonférence de trente degrés se nommé *signe*, que l'on désigne par S, de sorte que $2^{s}, 8^{\circ}, 7', 4''$, veut dire 68 degrés 7 minutes 4 secondes.

Le degré du globe terrestre est de 25 lieues, ou de 57060 toises.

Le diametre de la terre est de 6538594^{t}, le rayon de 3269297^{t}.

La lieue de 25 au degré est de $2281^{t}\frac{1}{5}$; la lieue commune de $2282^{t}\frac{2}{5}$.

La lieue marine, ou de 20 au degré, est de 2853^{t}.

La grande lieue d'Allemagne, de 15 au degré, est de 3804^{t}.

La lieue commune d'Allemagne est de 3333^{t}; la petite de 3042^{t}.

Le mille de Flandre est de 3221 toises; celui de France, qui est le même que ceux d'Angleterre & d'Italie, est de 950^{t} 3 pieds.

Le stade est de 85 toises.

La lieue de Paris, qui est la même que celle de Sologne & de Touraine, est de 2000 toises.

L'aune de Paris est de 3 pieds 8 pouces de Roi.

L'arpent est de 100 perches quarrées, qui valent 900 toises quarrées. La perche à Paris est de 18 pieds de roi; mais elle varie selon les lieux: aux environs de Paris, elle est de 22 pieds, & la perche étant de 22 pieds, l'arpent contient $1344\frac{4}{9}$ de toise quarrée.

Le boisseau à Paris est une mesure cylindrique qui doit avoir huit pouces deux lignes & demie de hauteur intérieurement, & dix pouces de diametre; il en faut 3 pour un *minot*, 12 pour un

setier, & 144 pour un *muid*. La capacité du boisseau varie selon les lieux.

Le muid d'avoine est double de celui de froment, il contient 12 setiers; mais le setier d'avoine contient 24 boisseaux.

Le muid de charbon de bois contient 20 mines, ou charges, ou sacs; chaque mine deux minots, chaque minot 8 boisseaux, chaque boisseau 4 quarts ou 16 litrons, & chaque litron 36 pouces cubes.

Le muid de vin se divise en 2 demi-muids ou 36 setiers, & le setier en 8 pintes de Paris; ensorte que le muid de vin de Paris contient 288 pintes de Paris; la pinte est de 36 pouces cubes.

Le pas dont on fait usage à l'armée pour les campemens est de 3 pieds.

Le pas pour les manœuvres du soldat est de 2 pieds; le pas ordinaire de 2 pieds, se fait dans une seconde, ou dans le tems qu'on prononce *un*, *deux*.

Le pas redoublé se fait dans une demi-seconde, ou bien on fait deux pas par seconde; ainsi une troupe qui marche au pas redoublé fait 120 pas, & parcourt un espace de 240 pieds ou 40 toises par minute; elle parcourra donc dans une heure 2400 toises.

Le petit pas est d'un pied, d'un talon à l'autre; il se fait dans une seconde; on le nomme le *pas grave*.

Le pas géométrique est de 5 pieds.

Le pas ordinaire d'un homme qui marche est de 2 pieds & demi.

La *brasse* dont on fait usage dans la marine est de 6 pieds, c'est la grande brasse; la moyenne est de 5 pieds & demi; la petite est de 5 pieds.

La *palme* eſt une meſure dont on fait uſage à Rome & dans preſque toute l'Italie; ſa longueur eſt de 8 pouces 3 lignes 6 points.

La *coudée* eſt une meſure d'un pied 6 pouces.

La *canne* de Provence, d'Avignon & du bas-Languedoc eſt une meſure d'une aune de Paris & deux tiers; à Gènes, la canne a un pouce de moins.

La canne de Toulouſe, de Montauban, d'Agen eſt d'une aune & demie de Paris.

La canne de Rome & de Naples eſt de deux aunes de Paris moins un dix-ſeptieme.

14. Quoique la plupart des meſures, dont nous venons de parler, ſoient généralement connues, ainſi que la figure d'un quarré, nous ajouterons les définitions ſuivantes, que nous accompagnerons de *figures* pour les rendre plus ſenſibles.

15. DÉF. La toiſe quarrée eſt une ſurface plane ABCD, ou un quarré qui a une toiſe ou 6 pieds de longueur AB, & une toiſe de largeur AD. Elle contient 36 pieds quarrés tels que A*bcd*; la toiſe quarrée contient auſſi 6 toiſes-pieds Fig. 1.
quarrés, tels que ABM*d* ou 6^{TP}; & une TP contient 6^{PP} ou 6 pieds quarrés, tels que A*bcd*; on appelle *rectangle* ou *quarré-long*, une étendue plus longue que large ABM*d*, qui a ſes angles droits.

DÉF. Une *toiſe-pouce* eſt un rectangle qui a une toiſe de longueur & un pouce de largeur. C'eſt la douzieme partie d'une toiſe-pied. Elle vaut 72 pouces quarrés ABHI, ou un demi-pied quarré A*b*RV.

16. DÉF. La *toiſe cube* eſt un corps ou ſolide, qui a la forme d'un dé à jouer; elle 6 a pieds de

l. 1, fig. 2 & 3. longueur, 6 pieds de hauteur & 6 pieds d'épaisseur, & contient 216 pieds cubes; ou c'est un solide terminé par 6 faces, dont chacune est une toise quarrée: ABCDNMOP est une toise cube.

La toise cube se divise en six parties égales, Fig. 1. qu'on appelle *toise toise pieds* TTP, & chaque toise toise pied en 36 pieds cubes, 36^{ppp}; chaque pied cube est représenté par *Abcandom*, c'est la 216ᵉ partie de la toise cube ABCDNMOP; la toise toise pied TTP est représentée par A*b*KDNHVP, & vaut 36 pieds cubes, tels que *Abcandom*.

La toise pied pied ou TPP est représentée par A*bca*ELVP, & contient 6 pieds cubes.

On trouvera de même qu'une toise toise pouce est un corps qui a une toise quarrée de base & un pouce d'épaisseur, & qu'une toise toise ligne, qui en est la douzieme partie, est un corps qui a une toise quarrée de base & une ligne d'épaisseur, &c.

17. La solive est une piece de bois ou un corps qui a une toise de longueur AE, un pied de largeur AB, & 6 pouces d'épaisseur AD; ensorte Fig. 4. que la solive ABCDHEFG contient 3 pieds cubes; ou la solive est un corps ou un solide rectangle, dont la base ABCD contient 72 pouces quarrés, tels que AIL*c*, & qui a une toise AE de longueur; ou la solive est composée de 72 *parallélipipedes* ou *baguettes* d'un pouce quarré de base AIL*c*, & de 6 pieds de longueur AE.

La solive se divise en six parties égales, telles que ABCDVPRK, qu'on nomme *pieds de solive;* le pied de solive a donc 72 pouces quarrés de base ABCD, & un pied AP de hauteur.

Le pouce de solive, qui est la douzieme partie du

du pied de solive, a donc 72 pouces quarrés de base ABCD, & un pouce de hauteur; ou c'est un parallélipipède d'un pouce de base AILc, & d'une toise AE de longueur; c'est la 72ᵉ partie de la solive ABCDHEFG.

Une ligne de solive est la douzieme partie d'un pouce de solive, ou c'est un corps qui a 72 pouces quarrés de base, & une ligne de hauteur.

Si on fait attention que la toise cube vaut 216 pieds cubes, & la solive 3 pieds cubes, 72ᵉ partie de la toise cube, on verra qu'un pied de solive, qui est un demi-pied cube ABCDVPRK, est la 72ᵉ partie d'un pied de toise cube, qui vaut 36 pieds cubes, ou 72 demi-pieds cubes, ou 72 pieds de solive; conséquemment que le pouce de toise cube, 12ᵉ partie du pied de toise cube, vaut 72 fois un pouce de solive, 12ᵉ partie du pied de solive. Il en est de même des lignes & des points, &c. c'est-à-dire, qu'une toise cube vaut 72 solives; un pied de toise cube, 72 pieds de solive; un pouce de toise cube, 72 pouces de solive; une ligne de toise cube, 72 lignes de solive; un point de toise cube, 72 points de solive.

On voit, 1°. par l'inspection de la figure 4, que le pied de solive ABCDVPRK, qui contient six fois la tranche ABM*cop*RN, est égal au parallélipipede ABM*c*TEFX, qui a 12 pouces quarrés de base ABM*c*, & une toise AE de hauteur, c'est-à-dire, la 72ᵉ partie du pied de toise cube; 2°. que le pouce de solive AIL*c*TE, qui est la 12ᵉ partie du pied de solive ABM*c*TEFX, ou la 72ᵉ partie de la solive ABCDHEFG, est aussi la 72ᵉ partie du pouce de toise cube; car dans une toise toise pouce, il y a 72 baguettes telles que AIL TE : on comprendra aussi aisé-

ment qu'une ligne de pouce de ſolive eſt la 72e partie de la ligne de toiſe cube, &c.

Si on rencontre quelque difficulté qui arrête dans une premiere lecture des articles 12, 13, 14, 15, 16 & 17, on peut les paſſer ſans inconvénient, ſauf à y revenir enſuite.

18. **Axiome.** Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble. Il eſt plus grand qu'une de ſes parties; & ſi un tout eſt composé de deux parties, ce tout moins une de ſes parties, eſt égal à l'autre partie. Si on conſidere 9 comme un tout composé de deux parties 5 & 4, il eſt évident que $9 = 5 + 4$, & que $9 - 4 = 5$, &c.

19. Les opérations de l'Arithmétique ſe réduiſent à quatre : *ajouter*, *ſouſtraire*, *multiplier* & *diviſer*: toutes les autres ne ſont que des combinaiſons des quatre premieres; il n'y a donc réellement que quatre regles dans l'Arithmétique, ſavoir, l'*Addition*, la *Souſtraction*, la *Multiplication* & la *Diviſion*. Toutes les autres regles ne ſont que des applications de celles-là.

DE L'ADDITION.

Premiere Regle.

20. **Déf.** L'*Addition* enſeigne à trouver un nombre égal à pluſieurs autres nombres de même eſpece, complexes, ou incomplexes : ce nombre ou réſultat ſe nomme *ſomme* ou *total*. L'addition eſt *ſimple*, lorſqu'il ne s'agit que d'ajouter des nombres entiers ou incomplexes; elle eſt *compoſée*, lorſqu'il s'agit d'ajouter des nombres compoſés ou complexes.

Procédé ou *regle générale*, qui comprend les deux cas. Il faut écrire les nombres proposés les uns ſous les autres en colonne, les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, &c. & les ſous-eſpeces, où les parties de l'entier, ſous leurs correſpondantes, s'il y en a; & commençant par les unités de la plus petite eſpece, on examine combien leur nombre forme d'unités de l'eſpece immédiatement au-deſſus; ſi on en trouve un nombre exact ou ſans reſte, on poſe ſous cette colonne un zéro, & on joint à la colonne précédente, allant de droite à gauche, le nombre d'unités qu'elle a fourni, & s'il y a un excès, on le poſe ſous cette premiere colonne; ainſi de toutes les colonnes des ſous-eſpeces; enſorte qu'on joint à la colonne des entiers, le nombre d'entiers que les ſous-eſpeces ont donné: on poſe ſous la premiere colonne des entiers l'excédent des dixaines qu'elle fournit, ou ſi le nombre des dixaines eſt exact, on poſe un zéro, & on joint à la colonne des dixaines autant d'unités que la premiere colonne des entiers contient de dixaines: on poſe de même ſous la ſeconde colonne l'excès des dixaines, & on joint à la colonne précédente le nombre des dixaines qu'elle a donné, ainſi de ſuite juſqu'à la derniere colonne de droite à gauche, ſous laquelle on écrit ce qui excede les dixaines qu'on poſe en avant, & l'Addition eſt achevée: quelques exemples éclairciront ce procédé.

Premier Exemple de l'Addition ſimple.

On veut ajouter les quatre nombres ſuivans.

3648tt	
843	
9148	
795	
14434tt	somme.
12...	
22..	
21.	
24	
14434tt	preuve.

Procédé. Je dis, 8 & 3 font 11, & 8 font 19, & 5 font 24; je pose 4 sous cette premiere colonne à droite, je retiens les deux dixaines que je joins à la colonne précédente, disant : 2 & 4 font 6, & 4 font 10, & 4 font 14, & 9 font 23; je pose 3 & retiens 2, & 6 font 8, & 8 font 16, & 1 font 17, & 7 font 24; je pose 4 & retiens 2, & 3 font 5, & 9 font 14; je pose 4 & j'avance 1, & j'ai pour résultat 14434tt, qui est la somme des quatre nombres proposés.

DÉMONSTRATION. Il est clair que 14434tt est égal aux quatre nombres proposés, puisque par l'opération qu'on a faite, on a joint ensemble toutes leurs parties correspondantes chacune à chacune; on a donc leur somme (18). C. Q. F. D.

21. La preuve de l'Addition se fait en posant sous chaque colonne ce qu'elle contient, en commençant de gauche à droite; on fait l'Addition de ces nouveaux nombres, & l'on doit trouver la même somme; dans cet exemple, en additionnant la premiere colonne à gauche, on trouve 12, qu'on écrit au-dessous; en additionnant la suivante, on trouve 22, qu'on écrit au-dessous, savoir, les deux unités sous cette colonne, & les deux dixaines sous la colonne précédente; la colonne suivante donne 21, qu'on pose au-dessous, savoir, 1 sous cette colonne, & les 2 dixaines sous la colonne précédente; la suivante donne 24, qu'on pose, comme on voit, savoir, le 4 sous cette colonne, & le 2 sous la colonne précédente; on fait l'addition de ces nouveaux nombres, & l'on doit trouver la même

somme 14434tt. La raison de cela, est que dans la premiere addition on a ajouté les colonnes, & dans la seconde addition, on a ajouté les résultats des colonnes, ce qui est absolument la même chose; d'où il faut conclure que la premiere Addition a été bien faite, & que la seconde en est la preuve. C. Q. F. B. R.

Second Exemple d'Addition de livres, sols & deniers.

On a mis dans la caisse d'un régiment les quatre sommes suivantes; on demande à combien elles se montent.

La premiere somme de	7897tt.	13s.	9d
La seconde	79708	18	9
La troisieme	37975	17	6
La quatrieme	18443	16	3
Somme ou total . . .	144026tt.	6s.	3d
	11	.	.
	31 . . .	.	.
	28 . .	.	.
	20 .	.	.
	23	.	.
	3	4	.
		2	3
Preuve de l'Addition . .	144026tt.	6s.	3d

Dans cet exemple d'Addition complexe, la colonne des deniers contient 27 deniers ou 2s 3d: on pose les 3 den. sous cette colonne, on joint les 2 sols qui en sont provenus à la colonne des unités de sols; on trouve 26 sols, ou 2 dixaines de sols & 6s: on pose ces 6s sous cette colonne; on joint les deux dixaines de sols à la colonne des dixaines de sols; on trouve 6 dixaines, qui font 3tt: on les joint à la colonne des unités de

livres, on trouve 26tt ou 2 dixaines & 6tt : on pose les 6tt sous cette colonne, on ajoute les 2 dixaines à la colonne précédente vers la gauche ; on trouve 22 : on pose 2 sous cette colonne ; on joint les deux dixaines à la colonne des centaines, on trouve 30, ou 3 dixaines ; on pose un zéro sous cette colonne, on joint les 3 dixaines à la colonne précédente vers la gauche ; on trouve 34 : on pose 4, excès des dixaines, sous cette colonne, on joint les 3 dixaines à la colonne précédente ; on trouve 14 : on pose 4 sous cette colonne & 1 en avant ; on a donc pour le montant de ces quatre sommes, qui sont le fonds de la caisse de ce régiment, 144026tt 6s 3d.

DÉM. Il est clair que 144026tt 6s 3d sont une somme égale à celle des 4 nombres proposés, puisque par l'opération qu'on a faite, on a joint ensemble toutes leurs parties correspondantes chacune à chacune ; on a donc leur somme (18). C. Q. F. D.

Procédé de la preuve : la premiere colonne à gauche est 11, qu'on pose au-dessous ; la suivante est 31, qu'on pose sous elle-même, comme on voit, 1 sous cette colonne, & le 3 en avant sous le 1 ; la colonne suivante est 28, qu'on pose au-dessous ; la suivante est 20, qu'on pose de même, & la derniere est 23, qui se pose comme l'on voit, le 3 au rang des unités, & le 2 sous les dixaines : on passe à la colonne des unités de sols, on trouve 24s ; on pose au-dessous 4s : on joint les deux dixaines à la colonne des dixaines de sols, & on trouve 6 dixaines de sols, ou 3tt qu'on écrit sous le 3 au rang des unités de livre ; on passe à la colonne des deniers, où l'on trouve 27d ou 2s 3d ; on pose les 3d sous cette colonne, & les 2s sous les 4s : on

fait une addition de tous ces résultats, & l'on trouve la même somme 144026^{tt} 6^{f} 3^{d} C'est une preuve qu'on a bien fait la premiere addition.

Dans les exemples suivans, on fera la preuve sans en détailler le procédé.

Troisieme Exemple d'Addition de toises, pieds, pouces, lignes, &c.

	987^{t}	3$^{pi.}$	6$^{po.}$	11$^{l.}$
	835	4	9	9
	387	5	10	6
	867	0	7	5
Total	3078^{t}	2$^{pi.}$	10$^{po.}$	7$^{l.}$
	28 . .	.	.	.
	25 .	.	.	.
	26	.	.	.
	2	6	.	.
		2	8	.
			2	7
Preuve	3078^{t}	2$^{pi.}$	10$^{po.}$	7$^{l.}$

Procédé. Je dis: 11^{l} & 9 font 20, & 6 font 26, & 5 font 31^{l}, ou 2^{po} 7^{l}; je pose les 7^{l} sous la colonne des lignes; je retiens 2^{po} que je joins à la colonne des pouces, & je dis: 2^{po} & 6 font 8, & 9, 17, & 10, 27, & 7 font 34^{po} ou 2^{pi} 10^{po}: je pose l'excès 10^{po} sous les pouces; je retiens 2^{pi} que je porte à la colonne des pieds; je trouve 14^{pi} ou 2^{t} 2^{pi}: je pose les 2 pieds sous la colonne des pieds; & je joins les 2^{t} à la colonne des unités de toise; je trouve 28^{t}: je pose l'excès 8 des dixaines sous la colonne des unités de toise; je retiens 2 dixaines, que je porte à la colonne précédente vers la gauche; je trouve 27: je pose 7 sous cette colonne; je retiens 2 que joins à la colonne des centaines; je trouve 30: je pose zéro & j'avance 3; j'ai pour total, ou résultat de l'addition, 3078 toises 2 pieds 10 pouces 7 lignes. On voit la preuve au dessous.

Quatrieme Exemple d'Addition de livres, marcs, onces, gros, deniers ou ſcrupules & grains.

℔. m. O ou ℥ ʒ ℈ g

	374℔	1^{m}	7℥	6ʒ	2℈	21^{g}
	794	1	5	7	1	13
	7844	0	6	3	1	20
	5843	1	7	5	1	14
Total.	14858℔	0^{m}	3℥	7ʒ	1℈	20^{g}
	12 . . .	.	.	.	.	.
	26 . .	.	.	.	.	.
	24 .	.	.	.	.	.
	15	.	.	.	.	.
	1	1	.	.	.	.
		3	1	.	.	.
			2	5	.	.
				1	2	.
					2	20
Preuve..	14858℔	0^{m}	3℥	7ʒ	1℈	20^{g}

Cinquieme Exemple d'Addition d'années, mois, jours, heures, minutes, ſecondes, &c.

	$1648^{ans.}$	$7^{m.}$	$19^{j.}$	$8^{h.}$	36′	25″.
	247	11	28	21	40	38
	15	10	8	7	4	8
Total. .	$1912^{ans.}$	$5^{m.}$	$26^{j.}$	$13^{h.}$	21′	11″.
	189 .	.	.	.	.	.
	20	.	.	.	.	.
	2	4	.	.	.	.
		1	25	.	.	.
			1	12	.	.
				1	20	.
					1	11
Preuve. .	$1912^{ans.}$	$5^{m.}$	$26^{j.}$	$13^{h.}$	21′	11″.

Procédé du cinquieme exemple : 25 & 38 font 63, & 8, 71 ou 1′ & 11″; je pose 11″ sous la colonne des secondes, je joins 1′ à la colonne des minutes, & je trouve 81′ ou 1^h 21′ : je pose 21′ sous les minutes, je retiens une heure que je joins à la colonne des heures, & je trouve 37^h, ou 1^j & 13^h; je pose 13^h sous les heures, je retiens 1^j, que je joins à la colonne des jours, & je trouve 56 jours, ou 1^m 26^j, je pose 26 jours sous les jours; je retiens 1 mois que je joins à la colonne des mois; je trouve 29 mois ou 2 ans 5 mois; je pose 5 mois sous les mois, je retiens 2 années que je joins à la colonne des unités d'année, & je trouve 22 ans; je pose l'excès 2 des dixaines, & je retiens 2 dixaines, que je joins à la colonne des dixaines, & je trouve 11; je pose 1 & retiens 1, que je joins à la colonne des centaines; je trouve 9 que je pose sous cette colonne; je passe à la colonne des mille, où je ne trouve que 1, je le pose; j'ai pour résultat de l'addition 1912^{ans} 5^m 26^j 13^h 21′ 11″.

La preuve se fait comme dans le premier & le second exemple.

DE LA SOUSTRACTION.

SECONDE REGLE.

22. DÉF. LA soustraction enseigne à ôter un nombre complexe ou incomplexe d'un autre de même espece, pour en connoître la *différence* ou l'*excès* ou le *reste*.

23. *Principe.* Si à deux nombres quelconques on ajoute un même nombre, on aura deux nouveaux nombres qui auront la même

différence que les deux premiers; si aux nombres 17 & 13, dont la différence est 4, on ajoute un nombre quelconque 9, on aura 26 & 22, dont la différence est encore 4; on peut les exprimer ainsi, 17—13=26—22=4; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

24. De ce principe on déduit une méthode facile de faire la soustraction, c'est la seule dont on fera usage dans ce traité; elle sert d'introduction à la division: en voici le procédé appliqué à un exemple.

Un particulier a 7054tt 13s 3d de rente; il dépense dans le courant de l'année 5438tt 16s 8d; on demande ce qui lui reste. Pour faire cette regle, je pose le nombre que je veux soustraire sous celui dont je veux l'ôter; les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c. & les sous-especes sous leurs correspondantes, comme on voit ci-dessous.

Revenu	7054tt . .	13s . .	3d
Dépense	5438 . .	16 . .	8
Reste . .	1615tt . .	16s . .	7d
Preuve .	7054tt . .	13s . .	3d

Procédé. Je commence par la plus petite espece; je dis: qui de 3d ôte 8d ne peut; je joins aux 3d un sol, qui est une unité de l'espece qui précede les deniers, j'ai 15d; j'en ôte 8d, il reste 7d, que j'écris sous les 8d; je joins ce même sol aux 16s du nombre inférieur; par ce moyen les deux nombres proposés conservent entr'eux (23) la même différence; j'ai 17s que

je ne puis ôter du nombre supérieur 13ˢ ; je joins à ces 13ˢ une liv. ou 20ˢ, qui est une unité de l'espece qui précede les sols, j'ai 33ˢ, d'où j'ôte 17ˢ, il reste 16ˢ, que j'écris sous la colonne des sols, je joins cette même liv. au premier chiffre 8 du nombre inférieur, pour que les nombres proposés 7054ᵗᵗ 13ˢ 3ᵈ, & 5438ᵗᵗ 16ˢ 8ᵈ aient toujours entr'eux la même différence (23), & j'ai 9ᵗᵗ que je ne puis ôter du chiffre supérieur correspondant 4, j'ajoute à ce 4 une unité du rang qui précede, c'est-à-dire, une dixaine, j'ai 14, d'où j'ôte 9, il reste 5, que j'écris sous le 8 ; je retiens cette dixaine, je la joins au chiffre inférieur précédent 3, j'ai 4 que j'ôte du nombre supérieur 5, il reste 1 que j'écris sous le 3 ; je passe à la colonne précédente, & je dis : qui de zéro ôte 4 ne peut, je joins à ce zéro une dixaine, j'ai 10 dont j'ôte 4, il reste 6 que j'écris sous le 4 : je joins la même unité de dixaine au chiffre inférieur précédent 5, j'ai 6 que j'ôte du chiffre supérieur 7, il reste 1, que j'écris sous le 5, & la regle est faite : on a donc pour différence des deux nombres proposés, le nombre 1615ᵗᵗ 16ˢ 7ᵈ, ce qui est évident par l'opération même & par le (23). C. Q. F. F.

25. La regle générale, pour la soustraction, est donc 1°. d'ajouter au chiffre supérieur, lorsqu'il est plus petit que l'inférieur, une unité de l'espece ou du rang qui précede ; 2°. de retenir cette unité & de la joindre au chiffre inférieur de l'espece ou de la colonne précédente ; ainsi de suite jusqu'à la fin de l'opération, en observant de ne rien ajouter au nombre ou au chiffre supérieur, & de ne rien retenir lorsque ce chiffre est plus grand que l'inférieur ; on écrira seulement dans

ce cas, le reste sous cette colonne. C. Q. F. B. R.

26. PROBLÊME. Un homme est né le 7 octobre 1713, il est mort le 23 janvier 1765; combien a-t-il vécu?

SOLUTION. Il est clair que le tems pendant lequel cet homme a vécu est la différence du 7 octobre 1713 au 23 janvier 1765; c'est-à-dire, que si de l'année de sa mort on ôte l'année de sa naissance, on aura le nombre des années qu'il a vécu. Il est clair aussi (23) qu'en regardant comme écoulés, l'année, le mois, le jour, l'heure de sa naissance, de même que l'année, le mois, le jour, &c. où cet homme est mort, on conserve la même différence.

J'écris donc pour le tems de la mort	1765 ans.	1 m.	23 j.
Pour celui de la naissance . .	1713	10	7
Reste, ou nombre des années qu'il a vécu	51 ans.	3 m.	16 j.
Preuve	1765 ans.	1 m.	23 j.

Procédé. Je dis: qui de 23 ôte 7, il reste 16, que j'écris sous les jours; qui d'un mois ôte 10 mois ne peut, j'y joins un an ou 12 mois, & j'ai 13 mois, d'où j'ôte 10 mois, il reste 3^{m} que j'écris sous les mois; je retiens un an, que je joins au chiffre inférieur 3 des unités d'année, & j'ai 4, que j'ôte du chiffre supérieur 5, il reste 1, que j'écris sous le 3. Je passe aux dixaines, & je dis: qui de 6 ôte 1, il reste 5, que j'écris sous 1, & la regle est achevée; parce que, qui de 17 ôte 17, il ne reste rien: cet homme a donc vécu 51 ans 3 mois 16 jours. C. Q. F. Dét.

27. La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le nombre que l'on ôte, avec la différence ou le reste, on doit trouver le nombre supérieur; car ce nombre supérieur peut être regardé comme un tout, dont le nombre inférieur & le reste sont les parties : or la somme des parties doit égaler le tout (18). Dans cet exemple, le nombre inférieur $1713^{ans}\ 10^{m}\ 7^{j}$ joint au reste $51^{ans}\ 3^{m}\ 16^{j}$ égale le nombre supérieur $1765^{ans}\ 1^{m}.\ 23^{j}.$; donc la regle est bien faite. C. Q. F. B. R.

28. PROB. On a fait faire $2034^{t}\ 2^{pi}\ 6^{po}$ de tranchée; on en a payé $918^{t}\ 5^{pi}\ 11^{po}$: on demande combien il en reste à payer?

SOLUTION. Il est clair que

si de l'ouvrage fait . . .	$2034^{t.}$	$2^{pi.}$	$6^{po.}$
On ôte l'ouvrage qu'on a payé	$918^{t.}$	$5^{pi.}$	$11^{po.}$
On aura l'ouvrage qu'il reste à payer	$1115^{t.}$	$2^{pi.}$	$7^{po.}$
Preuve	$2034^{t.}$	$2^{pi.}$	$6^{po.}$

Procédé. Je dis : qui de 6^{po} ôte 11^{po} ne peut; je joins un pied ou 12^{po} aux 6^{po}, & j'ai 18^{po}, dont j'ôte 11^{po}, il reste 7^{po}, que j'écris sous les pouces, & je retiens 1^{pi}, que je joins aux 5^{pi}; j'ai 6^{pi}, que je ne puis ôter du chiffre supérieur 2^{pi}; j'y joins une toise, j'ai 8^{pi}, dont j'ôte 6^{pi}, il reste 2^{pi}, que j'écris sous les pieds; je retiens une toise que je joins aux unités de toise 8, & j'ai 9, que je ne puis ôter du chiffre correspondant 4, j'y joins une dixaine, & j'ai 14; j'en ôte 9, il reste 5, que j'écris au dessous; je retiens 1, que je joins au chiffre précédent 1, & j'ai 2 que j'ôte du chiffre

ſupérieur correſpondant 3 ; il reſte 1, que je poſe au deſſous : je ne retiens rien ; je paſſe aux centaines ; je dis : qui de zéro ôte 9 ne peut ; je joins au zéro une dixaine, j'en ôte 9, il reſte 1, que j'écris au deſſous, je retiens 1 que j'ôte du chiffre ſupérieur précédent 2, il reſte 1 que j'écris au deſſous, & la regle eſt achevée : il reſte donc $1115^{t}\ 2^{pi}\ 7^{po}$; ce qui eſt vrai : car ſi on les ajoute au nombre inférieur $918^{t}\ 5^{pi}\ 11^{po}$, on a $2034^{t}\ 2^{pi}\ 6^{po}$. C. Q. F. Dét.

29. PROBLÊME. Un particulier fait un emprunt de 30000^{tt} ; il paie à compte $19804^{tt}\ 17^{f}\ 9^{d}$, que redoit-il ?

Dette	30000^{tt} . .	0^{f} . . .	0^{d}
On a payé à compte . .	19804 . . .	17 . . .	9
Reſte à payer	10195^{tt} . .	2^{f} . . .	3^{d}
Preuve	30000^{tt} . .	0^{f} . . .	0^{d}

Procédé. Qui de zéro ôte 9^{d} ne peut, j'ajoute 1^{f} ou 12^{d} au zéro, j'en ôte 9, il reſte 3^{d} que j'écris ſous le 9 ; je retiens 1^{f} que je joins aux 17^{f}, j'ai 18^{f} que je ne puis ôter de zéro, j'y joins 1^{tt} ou 20^{f}, j'en ôte 18^{f}, il reſte 2^{f}, que j'écris ſous 17^{f} ; je retiens 1^{tt} que je joins au 4, & j'ai 5, que je ne puis ôter du chiffre ſupérieur correſpondant 0, j'y joins une dixaine, j'en ôte 5, il reſte 5 que j'écris ſous le 4 ; je retiens 1 que j'ajoute au chiffre inférieur précédent 0, j'ai 1 que j'ôte de zéro, ou plutôt d'une dixaine que j'y joins, il reſte 9, que j'écris ſous zéro ; je retiens 1 que je joins au 8 ; j'ai 9 que j'ôte de zéro, ou plutôt de 10, il reſte 1, que j'écris ſous le 8 ; je retiens 1 que je joins au 9, j'ai 10 que j'ôte de zéro, ou plutôt de 10, il reſte zéro, que j'écris ſous le 9 ; je retiens 1 que je joins au chiffre précédent inférieur

1, j'ai 2 que j'ôte du chiffre supérieur correspondant 3, il reste 1; la regle est achevée : on redoit donc 10195^{tt} 2^{f} 3^{d}; car ce nombre joint à 19804^{tt} 17^{f} 9^{d}, donne le nombre supérieur, ou la dette 30000^{tt}. C. Q. F. Dét.

30. PROB. Un Marchand

a	13℔	1^{m}	3℥	4ʒ	1℈	20^{g}	de carmin;
Il en vend	8	1	7	5	2	23	
Il lui reste	4℔	1^{m}	3℥	6ʒ	1℈	21^{g}	
Preuve . .	13℔	1^{m}	3℥	4ʒ	1℈	20^{g}	

Procédé. Qui de 20^{g} en ôte 23 ne peut, j'y joins 1℈ ou 24^{g}; j'ai 44^{g}, j'en ôte 23, il reste 21^{g} que je pose sous les grains, je retiens 1℈ que je joins aux 2℈, j'ai 3℈ que je ne puis ôter de 1℈; j'y joins un gros qui vaut 3℈, j'ai 4℈, j'en ôte 3, il reste 1℈ que j'écris au dessous; je retiens 1ʒ que je joins aux 5ʒ, j'ai 6ʒ que je ne puis ôter de 4ʒ; j'y joins 1℥ ou 8ʒ, j'ai 12ʒ, j'en ôte 6, il reste 6ʒ, que j'écris au dessous; je retiens 1℥ que je joins aux 7℥, j'ai 8℥ que je ne puis ôter de 3℥; j'y joins 1^{m} ou 8℥, j'ai 11℥, j'en ôte 8, il reste 3℥ que j'écris au dessous; je retiens 1^{m} que je joins au chiffre inférieur précédent 1, j'ai 2^{m} que je ne puis ôter du chiffre supérieur 1, j'y joins 1℔ ou 2^{m}, j'ai 3^{m} d'où j'ôte 2^{m}, il reste 1^{m} que j'écris au dessous; je retiens 1℔ que je joins au chiffre inférieur 8, j'ai 9℔ que j'ôte de 13℔, il reste 4℔, que j'écris au dessous; la regle est achevée : il reste donc à ce Marchand 4℔ 1^{m} 3℥ 6ʒ 1℈ 21^{g} de carmin (1). C. Q. F. Dét.

(1) Le détail dans lequel on vient d'entrer ne laisse aucune difficulté sur la soustraction. Il ne s'agit que d'exercer les commençans par plusieurs exemples.

DE LA MULTIPLICATION.

TROISIEME REGLE.

31. DÉF. La multiplication eſt une regle qui enſeigne à répéter un nombre ſimple ou compoſé autant de fois & de parties de fois, qu'il y a d'unités & de parties d'unité dans un nombre quelconque. Multiplier un nombre par un autre, c'eſt donc répéter le premier autant de fois & de parties de fois qu'il y a d'unités & de parties d'unité dans le ſecond; ou c'eſt répéter le ſecond autant de fois & de parties de fois qu'il y a d'unités & de parties d'unité dans le premier; en général, le nombre qu'on doit répéter ſe nomme *multiplicande*, l'autre *multiplicateur*, le réſultat *produit*; le multiplicande & le multiplicateur ſe nomment auſſi les *termes* de la multiplication, ou les *produiſans*, ou les *facteurs*, ou les *racines* du *produit*.

32. En propoſant de multiplier 4 par 3, on peut avoir deux intentions; 1°. de répéter 4 unités 3 fois; ou 2°. de répéter 3 unités 4 fois; & il eſt évident que dans ces deux cas, le réſultat eſt 12 unités; mais dans le premier cas, ces 12 unités ſont de même eſpece que le 4, & dans le ſecond cas, les 12 unités du produit ſont de même eſpece que le 3; d'où il réſulte 1°. que dans toute multiplication on doit conſidérer un des nombres comme *concret*, & l'autre comme *abſtrait*; 2°. que c'eſt par l'état de la queſtion qu'on reconnoît le nombre concret, c'eſt celui qui a ſes unités de même eſpece que celles qu'on cherche, c'eſt le *multiplicande*; l'autre appellé *multiplicateur*, eſt le nombre abſtrait, ou celui qui déſigne

désigne combien de fois [illegible]
plicande.

33. THÉORÈME. Dans [illegible]
rique, l'état de la [illegible]
quelle espece doivent [illegible]
1°. si le multiplicande [illegible]
des nombres abstraits [illegible]
abstrait ; 2°. si le mu[illegible]
teur sont des nombres [illegible]
ou non, on doit en [illegible]
& les unités du produit [illegible]
celles du produisant [illegible]
duisans est concret [illegible]
produit sont de même [illegible]
duisant concret.

DÉM. Il est [illegible]
nombres abstraits [illegible]
nombre abstrait [illegible]
pete 4 fois le [illegible]
nombre abstrait [illegible]

2°. Si on [illegible]
ront 8 aunes [illegible]
voit par l'état [illegible]
8 aunes doit [illegible]
que pour [illegible]
répéter 8 fois [illegible]
produit est [illegible]
du produisant [illegible]

Autre [illegible]
combien [illegible]
l'état de la [illegible]
7 de [illegible]
donc [illegible]
nombre [illegible]
ront le même [illegible]
7 ; savoir [illegible]

3°. Si on propose de multiplier 6tt par l[e] nombre abstrait 5, on aura 30tt pour produit puisqu'il s'agit seulement de répéter 6tt 5 fois On auroit trouvé de même 30tt, si on avoit pro-posé de prendre 6 fois 5tt; donc, &c. C.Q.F.3°.D

34. Dans la pratique, pour abréger, on prend pour multiplicande le plus grand nombre, l'autre pour multiplicateur ; c'est pourquoi les unités du produit peuvent être de même espece que celles du multiplicande ou du multiplicateur, si ce dernier est concret : c'est l'état de la question qui le décide.

35. Pour faire & entendre facilement la multiplication des nombres simples ou composés, il faut savoir par mémoire quel est le produit de deux nombres quelconques, dont le plus grand n'excede pas 12 : on trouvera tous ces produits dans la table suivante, dont on attribue l'invention à *Pythagore* ; il est essentiel de se la rendre familiere.

A *Rang horisontal.* D

Rang vertical.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	.	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	.	.	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	.	.	.	25	30	35	40	45	50	55	60
6	.	.	.	.	36	42	48	54	60	66	72
7	.	.	.	.	.	49	56	63	70	77	84
8	.	.	.	.	.	.	64	72	80	88	96
9	.	.	.	.	.	.	.	81	90	99	108
10	.	.	.	.	.	.	.	.	100	110	120
11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	121	132
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	144

B

Usage de cette Table.

36. Pour trouver le produit de deux nombres, dont le plus grand n'excede pas 12, il faut prendre le plus petit des deux nombres proposés dans la colonne verticale AB, & le plus grand dans la colonne supérieure horisontale AD; la rencontre des colonnes correspondantes à ces deux nombres donnera leur produit; si on veut savoir quel est le produit de 7 par 9, on suivra la colonne horisontale qui répond à 7 pris dans la colonne verticale AB jusque sous le 9 pris dans la colonne supérieure horisontale AD: on trouvera 63, qui est le produit de 9 par 7; ainsi des autres.

Lorsqu'on se sera rendu familiers les produits de deux nombres, dont le plus grand n'excede pas 12; on s'exercera à connoître dans chacun de ces produits & dans tout nombre au dessous de 99, combien un nombre au dessous de 10 y est contenu de fois, & ce qui reste: par exemple, connoître que 8 est contenu six fois dans 49, & un de reste; que 8 est contenu 9 fois dans 78, & 6 de reste; que 7 est contenu 6 fois dans 47, & 5 de reste; ainsi des autres.

37. Il est bon de faire connoître qu'à l'aide des doigts des deux mains, on trouve facilement le produit de deux nombres au dessous de 10 & au dessus de 4: 1°. on prend la différence du premier nombre à 10, qu'on exprime par autant de doigts ouverts d'une main; 2°. on prend la différence du second nombre à 10, qu'on exprime par autant de doigts ouverts de l'autre main; le nombre des doigts fermés des deux mains marque le nombre des dixaines du produit, au-

quel on ajoute le produit des doigts ouverts d'une main par les doigts ouverts de l'autre main; ainsi pour multiplier 8 par 7, on ouvre 2 doigts d'une main & 3 de l'autre, différences de ces nombres 8 & 7 à 10; il reste 5 doigts fermés dans les deux mains, qui valent 5 dixaines ou 50; on y ajoute 6, produit des 2 doigts ouverts d'une main par les 3 doigts ouverts de l'autre main; on a 56 pour le produit de 8 par 7: en effet $8 \times 7 = 56$; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

38. Il est bon aussi de faire connoître qu'on distingue dans chaque entier deux sortes de parties; 1°. celles qui sont contenues une ou plusieurs fois exactement dans l'entier, se nomment *parties exactes* ou *parties aliquotes* de l'entier; 2°. celles qui n'y sont pas contenues exactement sont nommées *parties non exactes* ou *parties aliquantes* de l'entier; & que toute partie non exacte ou aliquante se partage en parties exactes ou aliquotes : par exemple, 7^{s} ne sont pas contenus exactement dans la livre qui vaut 20^{s}, mais ses parties 5 & 2 sont des parties exactes de la livre; 5^{s} en sont le quart, & 2^{s} le dixieme. De même 5^{pi} ne sont pas une partie exacte de la toise qui vaut 6^{pi}; mais les parties 3^{pi}, 2^{pi}, de 5^{pi} sont des parties exactes de la toise; 3^{pi} en sont la moitié, & 2^{pi} le tiers; il sera donc toujours facile de réduire les parties non exactes en parties exactes, dès qu'on saura combien l'entier contient de parties. C. Q. F. B. R.

39. *Principe.* Des dixaines multipliées par des unités, ou des unités multipliées par des dixaines produisent des dixaines; $10 \times 4 = 40$, ou quatre dixaines; de même des centaines, des mille, des dixaines de mille, multipliées par des unités pro-

duisent des centaines, des mille, des dixaines de mille, &c; c'est-à-dire, que des dixaines, des centaines, des mille, des dixaines de mille, &c. multipliées par des unités, donnent des produits qui doivent être mis au rang des dixaines, des centaines, des mille, des dixaines de mille, &c. Il est clair que 2000 multipliés par 3, ou, ce qui est la même chose, pris 3 fois, donnent 6000, c'est-à-dire 6 unités, qui doivent occuper le rang des mille, &c. C. Q. F. B. R.

40. PROB. Trouver le produit de deux nombres quelconques; ce qui renferme 3 cas: 1°. les deux nombres proposés peuvent être simples; 2°. l'un peut être simple & l'autre composé; 3°. tous deux peuvent être composés.

Regle générale qui comprend les trois cas.

1°. On pose les unités, les dixaines, les centaines, &c. du multiplicateur sous les nombres correspondans du multiplicande, & à leur suite, leurs sous-especes, s'il y en a.

2°. Il faut que chaque chiffre des entiers du multiplicateur, à commencer par les unités, multiplie les unités, les dixaines, les centaines, &c. du multiplicande. Pour cet effet, on écrira de droite à gauche, au rang que donne chaque produit particulier (39), l'excès des dixaines; on retiendra le nombre des dixaines considéré comme des unités du rang précédent vers la gauche, & on les ajoutera au produit suivant vers la gauche; si le produit donne un nombre exact de dixaines, on pose au dessous un zéro, & on retient ce nombre de dixaines pour le joindre de même au produit suivant vers la gauche; ainsi des autres jusqu'au premier chiffre à gauche, du

multiplicande, où étant arrivé, on pose aux rangs qui leur conviennent (39) l'excès des dixaines, & les dixaines qu'on retient, considérées comme des unités d'un rang en avant, vers la gauche.

39. Les parties du produisant concret ne multiplient que les entiers du nombre abstrait, considérés comme unités concretes.

4°. Les parties du produisant abstrait multiplient les entiers & les parties du nombre concret; c'est-à-dire, que si les parties du nombre abstrait sont la moitié, le tiers ou le quart, &c. de l'unité abstraite; il faudra prendre la moitié, le tiers ou le quart, &c. des entiers & des parties du nombre concret : deux ou trois exemples éclairciront ces principes.

41. *Premier Exemple qui répond au premier cas.*

On demande combien coûte une remonte de 6709 chevaux, à raison de 308# chacun?

SOLUTION. Il est clair, par l'état de la question, que la remonte coûte autant de fois 308# qu'il y a de chevaux : on doit donc répéter 308#, 6709 fois. Le nombre concret est donc 308#, & l'abstrait est le nombre de chevaux 6709; mais (32 & 33) soit qu'on multiplie 308# par 6709, ou 6709 par 308, on a le même produit. Je prends donc pour abréger 6709 pour multiplicande, & 308 pour multiplicateur, & les dispose comme on voit.

Multiplicande . 6709 chevaux, nombre abstrait
Multiplicateur . . 308# nombre concret.

53672
201270

Produit . . . 2066372# prix de la remonte.

Procédé. Après avoir posé les unités, les dixaines, les centaines du multiplicateur, sous les nombres correspondans du multiplicande, je dis : 8 fois 9 font 72 ; je pose 2 & retiens 7 dixaines ; 8 fois 0 est zéro, & 7 dixaines de retenues font 7, que je pose au rang des dixaines ; 8 fois 7 centaines font 56 centaines ; je pose 6 au rang des centaines, & retiens 5 : 8 fois 6 font 48, & 5 de retenus font 53 ; je pose 3 excès des dixaines au rang des mille, & avance 5 : j'ai pour produit de 6709 par 8, 53672 : je passe au second chiffre 0, du multiplicateur ; j'observe que zéro multipliant un nombre quelconque ne peut produire que zéro ; je pose donc 0 au rang des dixaines sous 7, parce que 0 est au rang des dixaines dans le multiplicateur ; je passe au 3 du multiplicateur, qui est au rang des centaines ; je dis : 3 fois 9 font 27, je pose 7 au rang des centaines (39), & retiens 2 ; 3 fois 0 est 0, & 2 de retenus font 2, que je pose au rang des mille ; 3 fois 7 font 21, je pose l'excès 1 des dixaines au rang des dixaines de mille, & retiens 2 ; 3 fois 6 font 18, & 2 de retenus font 20 ; je pose 0 au rang des centaines de mille, & avance 2 au rang des millions : je fais l'addition de ces produits, & j'ai 2066372tt pour le prix de la remonte.

Dans la pratique on s'abstient de prononcer les mots, *unités*, *dixaines*, *centaines*, *mille*, &c : pour abréger, on sous-entend ces dénominations, mais on doit observer de placer l'excès des dixaines aux rangs où répondent ces dénominations ; c'est-à-dire, les dixaines, les centaines, &c. sous les dixaines, les centaines, &c.

42. REMARQUE. Lorsqu'on multiplie un nombre entier par 10, on écrit un zéro à la suite du

nombre proposé, car c'est rendre ce nombre dix fois plus grand : ainsi 34 multiplié par 10 produit 340 : si on multiplie par 100, on écrit deux zéros; par mille, 3 zéros, &c. Ainsi 38 × 100 = 3800 ; de même 38 × 1000 = 38000; cela est évident, puisque c'est répéter 38, cent fois, mille fois, &c.

Si on multiplie un nombre par 20, on double les chiffres du nombre proposé, & on écrit un zéro à la suite : 38 × 20 = 760, cela est évident ; car en doublant les chiffres du nombre proposé, & écrivant un zéro à la suite, on rend le nombre deux fois, dix fois, ou vingt fois plus grand. En général, quand on multiplie deux nombres qui se terminent par des zéros, on doit multiplier les deux nombres comme s'ils étoient sans zéros, & écrire à la suite du produit autant de zéros qu'il y en a dans les deux produisans, ou qu'on en a négligé. Si on propose de multiplier 3400 par 600 ; je multiplie 34 par 6, & j'écris à la suite du produit 204, les 4 zéros négligés, j'ai 2040000 pour le produit de 3400 par 600; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

43. Si on fait attention que la livre vaut 20 sols, on réduira les livres en sols, en les multipliant par 20 ; c'est-à-dire, qu'on doublera le nombre proposé de livres, & on écrira un zéro à la suite; ainsi on trouvera que 12^{tt} valent 240^{f}; que 9206^{tt} valent 184120^{f}, &c ; mais si le nombre de livres est accompagné de sols, on écrit les unités de sols à la place du zéro, & la dixaine de sols s'ajoute au double des unités de livre; ainsi 48^{tt} 17^{f} valent 960^{f} plus 17^{f} ou 977^{f}; de même 9^{tt} 8^{f} valent 188^{f}, & 6^{tt} 10^{f} valent 130^{f}; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

44. Faisons aussi remarquer qu'on réduit les sols en deniers, en les multipliant par 12; parce que le sol vaut 12ᵈ : ainsi pour réduire 289ˢ en deniers, je multiplie ce nombre par 12; je dis: 12 fois 9 font 108, je pose l'excès 8, des dixaines, & retiens 10; 12 fois 8 font 96, & 10 de retenus font 106, je pose 6 & retiens 10; 12 fois 2 font 24, & 10 de retenus font 34, je pose 4 & avance 3; je trouve que 289^{s} valent 3468^{d}.

Multiplicande . . .	289^{s}
Multiplicateur . . .	12
Produit	3468^{d}

Pour abréger, lorsqu'on multiplie un nombre par 12, ou par un plus petit nombre, on n'écrit point le muliplicateur. C. Q. F. B. R.

45. *Deuxieme exemple qui répond au second cas de la regle générale* (40).

PROB. Combien coûteront 208 muids de vin à raison de 106ᵗᵗ 14ˢ 6ᵈ le muid?

SOLUTION. Je vois par l'état de la question qu'il faut répéter le prix du muid 106ᵗᵗ 14ˢ 6ᵈ autant de fois qu'il y a d'unités dans 208 muids, savoir 208 fois; ainsi 106ᵗᵗ 14ˢ 6ᵈ est le produisant concret, le multiplicande ou le nombre à multiplier, & 208 le produisant abstrait ou le multiplicateur; je dispose ces termes comme on le voit au haut de la page suivante.

Multiplicande... 106 ₶ 14ſ 6d, nombre concret.
Multiplicateur... 208 muids, nombre abſtrait.

	848	
	2120	
	104	
	20 ...	16ſ
	20 ...	16
	5 ...	4
Produit ..	22198 ₶ ...	16ſ

Procédé. Ayant multiplié les entiers par les entiers, 106 par 208, comme dans le premier exemple (41), je paſſe aux ſols & deniers. J'obſerve que je dois répéter 14ſ 6d 208 fois, & comme 14ſ ne ſont pas une partie exacte de la livre, je les partage en 3 parties exactes, 10ſ, 2ſ & 2ſ; cela fait, je conſidere que ſi j'avois 1 ₶ à multiplier par 208, j'aurois pour produit 208 ₶ puiſque j'aurois 1 ₶ à répéter 208 fois; ainſi 10ſ étant la moitié de la livre, doivent donner la moitié de 208 ₶, ſavoir 104 ₶; ainſi pour 10ſ, je dis : la moitié de 2 eſt 1, que je poſe au rang des centaines; la moitié de 0 eſt 0, que je poſe au rang des dixaines; la moitié de 8 eſt 4, que je poſe au rang des unités; pour la ſeconde partie 2ſ, qui ſont la 10e partie de 1 ₶, je prends le 10e de 208, conſidérés comme des livres, & j'ai 20 ₶ 16ſ, que je trouve en diſant : la 10e partie de 2 n'eſt point un entier; la 10e partie de 20 eſt 2, que j'écris ſous le zéro au rang des dixaines : la 10e partie de 8 n'eſt point un entier ; je poſe un zéro ſous le 8; ce dernier chiffre 8 du multiplicateur repréſente 8 ₶ ou

160^{s}, dont la 10e partie eſt 16^{s}, que j'écris au rang des ſols. La troiſieme partie 2^{s} donne le même produit 20^{tt} 16^{s}; je l'écris au deſſous; il reſte à multiplier 6^{d} : j'obſerve que 6^{d} étant le quart de 2^{s}, ils doivent donner le quart du produit de 2^{s}; je prends donc le quart de 20^{tt} 16^{s}, & j'ai 5^{tt} 4^{s} pour le produit des 6^{d}. J'ajoute tous ces produits particuliers, leur ſomme 22198^{tt} 16^{s} eſt le produit cherché ou le prix des 208 muids de vin; ce qui eſt évident par l'opération même, puiſqu'on a pris autant de fois le multiplicande 106^{tt} 14^{s} 6^{d} qu'il y a d'unités dans le multiplicateur 208 muids. C. Q. F. Dét.

46. Pour abréger, lorſqu'on prend pour 2^{s}, on met un point ſur le chiffre des unités (ce ſeroit ſur le 8 dans l'exemple précédent), & l'on a pour produit les chiffres précédens, qu'on écrit en rétrogradant d'un rang vers la droite; le chiffre marqué d'un point ſe double & ſe met au rang des ſols. La raiſon de cette opération eſt qu'en retranchant le chiffre des unités, on rend les chiffres précédens dix fois plus petits, & par conſéquent on prend la dixieme partie du nombre. Il faut donc écrire ces chiffres en rétrogradant d'un rang vers la droite; & comme le chiffre retranché repréſente des livres, & que la dixieme partie d'une livre eſt 2 ſols, on doit le doubler pour avoir des ſols.

47. Pour un ſol, qui eſt la 20e partie de la livre, on retranche le dernier chiffre, on prend la moitié de ceux qui précedent, en rétrogradant d'un rang vers la droite; le chiffre retranché ſe met au rang des ſols; la raiſon en eſt, qu'en retranchant le dernier chiffre, on rend les précédens 10 fois plus petits, & qu'en prenant la moitié

de ces chiffres, on les rend 2 fois 10 fois, ou 20 fois plus petits, & qu'on en prend par conséquent la 20e partie ; & comme le dernier chiffre représente des livres, & que la vingtieme partie d'une livre est 1f, on doit donc mettre le dernier chiffre au rang des sols : ceci nous fournit un moyen bien simple de réduire un nombre de sols en livres. Si on demande combien de livres

valent . . . 37549f

on trouvera . 1877tt 9f

Procédé. On retranche le dernier chiffre 9 en le marquant d'un point ; & pour prendre la moitié de ceux qui précedent, on dit : la moitié de 3 est 1 ; il reste 1 qui vaut 10 par rapport au chiffre suivant 7 qu'on y ajoute, & l'on a 17, dont la moitié est 8 ; il reste 1 qui vaut 10 par rapport au chiffre suivant 5 qu'on y ajoute, & l'on a 15, dont la moitié est 7, il reste 1 qui vaut 10, & 4 font 14, dont la moitié est 7 ; il reste le chiffre retranché 9, qu'on écrit à la suite des livres au rang des sols : on a donc 1877tt 9f, qui valent 37549f ; on trouvera de même que 3478f valent 173tt 18f ; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

4°. Pour faciliter la pratique de la multiplication complexe, il est bon de donner la table des parties exactes de la livre, du sol & de la toise ; & d'enseigner la partie du nombre à multiplier qu'il faut prendre pour chacune de ces parties.

Table des parties de la livre.

Parties.

1 sol est le 20e de la livre ; il faut prendre le 20e du nombre à multiplier.

2 sols ... le 10e de la livre ; il faut prendre le 10e du nombre à multiplier.

Parties.

3 fols. On prend pour 2^f le 10e du nombre à multiplier ; & pour 1^f, le 20e ou la moitié du produit de 2^f.

4 . . Le 5e du nombre à multiplier, ou 2 fois pour 2^f.

5 . . Le quart du nombre à multiplier, ou la moitié du produit de 10^f.

6 . . On prend pour 5^f, & pour 1^f, ou 3 fois pour 2^f ou pour 4^f & pour 2^f.

7 . . On prend pour 5^f & pour 2^f.

8 . . 2 fois pour 4^f ou pour 5^f, 2^f & 1^f.

9 . . On prend pour 5^f & pour 4^f, ou pour 5^f & deux fois pour 2^f.

10 . . L'on prend la moitié du nombre à multiplier.

11 . . On prend pour 10^f & pour 1^f.

12 . . On prend pour 10^f & pour 2^f.

13 . . On prend pour 10^f, 2^f & 1^f.

14 . . On prend pour 10^f & 4^f ou pour 10^f, 2^f, 2^f.

15 . . Pour 10^f & pour 5^f la moitié du produit de 10^f.

16 . . On prend pour 10^f, 5^f & 1^f ; ou pour 10^f, 2^f, 2^f & 2^f.

17 . . On prend pour 10^f, 5^f & 2^f.

18 . . On prend pour 10^f, 5^f, 2^f & 1^f ; ou pour 10^f, 4^f & 4^f.

19 . . On prend pour 10^f, 5^f & 4^f ; ou 10^f, 5^f, 2^f, & 2^f.

Table des deniers par rapport aux fols.

Parties.

1 denier. Le 12e du produit d'un fol.

2 . . . . Le 6e.

3 . . . . Le quart.

4 . . . . Le tiers.

Parties.

5 deniers. Pour 4 & 1, ou 3 & 2.
6 . . . . La moitié du produit de 1^{s}, ou le quart du produit de 2^{s}.
7 . . . . Pour 4 & 3, ou pour 6 & 1.
8 . . . . Pour 4 & 4, ou 6 & 2; ou pour 8, le tiers du produit de 2^{s}.
9 . . . . Pour 6 & 3.
10 . . . . Pour 6 & 4.
11 . . . . Pour 6, 3 & 2; ou pour 4, 4 & 3.

Il est bon d'ajouter que 2^{s} 6^{d} font le 8e de la livre; 3^{s} 4^{d} le 6e, ou le tiers du produit de 10^{s}; & que 6^{s} 8^{d} font le tiers de la livre; ainsi pour 6^{s} 8^{d} on prend le tiers du nombre à multiplier.

Table des parties de la toise.

Pieds.

1 . . Le 6e du nombre à multiplier.
2 . . Le tiers.
3 . . La moitié.
4 . . Deux fois le tiers, ou pour 3 & 1.
5 . . Pour 3 & pour 2.

Pouces.

1 . . Le 12e du produit d'un pied.
2 . . Le 6e.
3 . . Le quart.
4 . . Le tiers.
5 . . Pour 4 & 1, ou pour 3 & 2.
6 . . La moitié, ou le quart du produit de 2^{pi}.
7 . . Pour 6 & 1, ou pour 4 & 3.
8 . . Pour 6 & 2; ou pour 8, le tiers du produit de 2 p^{pi}.
9 . . Pour 6 & 3.
10 . . Pour 6 & pour 4.
11 . . Pour 6, 3 & 2, ou pour 4, 4 & 3.

Troisieme exemple qui répond au troisieme cas de la regle générale (40).

49. PROB. Un Entrepreneur a fait construire, par ordre du Roi, $867^{t}\ 2^{pi}\ 8^{po}$ de revêtement de fortification, à raison de $89^{tt}\ 13^{f}\ 6^{d}$ la toise; que doit-on à cet Entrepreneur?

SOLUTION. Il est clair qu'il est dû à cet Entrepreneur autant de fois $89^{tt}\ 13^{f}\ 6^{d}$ qu'il y a d'unités dans 867^{t}, c'est-à-dire, 867 fois $89^{tt}\ 13^{f}\ 6^{d}$; plus, la même partie de $89^{tt}\ 13^{f}\ 6^{d}$, que $2^{pi}\ 8^{po}$ font de la toise; & comme 2^{pi} sont le tiers de la toise, & 8^{po} le tiers de 2^{pi}, il faudra prendre pour ces deux pieds, le tiers de $89^{tt}\ 13^{f}\ 6^{d}$, & le tiers de ce tiers pour les 8^{po}. On voit donc (33 & 34) qu'il s'agit de multiplier $867^{t}\ 2^{pi}\ 8^{po}$ considérés comme nombre abstrait par le nombre concret $89^{tt}\ 13^{f}\ 6^{d}$; 2°. que les unités du produit seront de même espece que celles du multiplicateur, savoir des livres, &c.

Multiplicande ... $867^{t}\ 2^{pi}\ 8^{po}$, nombre abstrait.
Multiplicateur ... $89^{tt}\ 13^{f}\ 6^{d}$, nombre concret.

7803^{tt}			... prod. de 9 unités.	
6936			.... de 8 dixaines.	
433	10^{f}		..... de 10^{f}	prod. de $13^{f}\ 6^{d}$.
86	14		.... de 2^{f}	
43	7		.... de 1^{f}	
21	13	6^{d}	de 6^{d}	
29	17	10	de 2^{pi}	prod. de $2^{pi}\ 8^{po}$.
9	19	$3\frac{1}{3}$	de 8^{po}	
77788^{tt}	1^{f}	$7^{d}\frac{1}{3}$	ou somme dûe à l'Entrepr.	

Procédé. Je dis: 9 fois 7 font 63, je pose 3 au rang des unités, & retiens 6 dixaines, ou simplement 6; 9 fois 6 font 54, & 6 de re-

tenus font 60, je pose zéro au rang des dixaines & retiens les 6 dixaines; 9 fois 8 font 72, & 6 de retenus font 78, je pose 8 au rang des centaines & avance 7; je passe aux 8 dixaines du multiplicateur, & je dis: 8 fois 7 font 56, je pose 6 au rang des dixaines sous 0, & retiens 5; 8 fois 6 font 48, & 5 de retenus font 53, je pose 3 & retiens 5; 8 fois 8 font 64, & 5 de retenus font 69, je pose 9 & avance 6.

Je passe aux 13ſ qui ne sont pas une partie exacte de la livre; mais ils se partagent en 3 parties exactes, 10ſ, 2ſ & 1ſ: j'observe que si on donnoit une livre de chaque toise, il faudroit donner 867tt pour les 867t du multiplicande; & comme 10ſ sont la moitié de la livre, il faut prendre la moitié du produit de la livre; savoir, la moitié des entiers du multiplicande 867t considérés comme des livres. Je dis donc: la moitié de 8 est 4, que je mets au rang des centaines, parce que 8 est au rang des centaines, & que la moitié de 800 est 400; par une raison semblable, j'écris 3 moitié de 6 dixaines au rang des dixaines, & 3 moitié de 7 unités au rang des unités; il reste 1tt, dont la moitié est 10ſ, que j'écris au rang des sols; j'ai donc 433tt 10ſ pour le produit de 10ſ.

La seconde partie 2ſ étant la 10e partie de la livre, je retranche le dernier chiffre 7, j'écris les précédens 86 en rétrogradant d'un rang vers la droite; je double le chiffre retranché 7 & j'ai 14ſ que j'écris au rang des sols; ainsi les 2ſ produisent 86tt 14ſ; la 3e partie 1ſ étant la moitié de 2ſ, doit donner la moitié de ce produit 86tt 14ſ, savoir 43tt 7ſ que j'écris au dessous.

Les 6 deniers du multiplicateur étant la moitié d'un

d'un sol, donnent la moitié du produit d'un sol, savoir 21tt 13f 6d, moitié de 43tt 7f.

Je passe aux parties 2 pieds & 8 pouces du nombre abstrait; 2pi étant le tiers de la toise, doivent donner le tiers du prix de la toise 89tt 13f 6d; je dis donc : le tiers de 8 est 2, que j'écris au rang des dixaines, il reste 2 dixaines qui étant jointes aux 9 unités font 29, dont le tiers est 9 unités; il reste 2tt, qui valent 40f & 13f font 53, dont le tiers est 17f, que j'écris au rang des sols; il reste 2 sols qui valent 24 deniers & 6d font 30d, dont le tiers est 10d; ainsi les 2 pieds produisent 29tt 17f 10d.

Je passe aux 8 pouces qui sont le tiers de 2 pieds; je prends donc pour ces 8 pouces le tiers du produit de 2 pieds, savoir le tiers de 29tt 17f 10d; je dis donc: le tiers de 29tt est 9tt, que je pose sous le 9; il reste 2tt qui valent 40f, & 17f font 57f, dont le tiers est 19f sans reste; le tiers de 10d est $3^d \frac{1}{3}$; ainsi les 8 pouces produisent 9tt 19f $3^d \frac{1}{3}$; je fais la somme de tous ces produits particuliers, & je trouve 77788tt 1f $7^d \frac{1}{3}$ pour la somme due à cet Entrepreneur; ainsi des autres. C. Q. F. Dét.

50. Lorsqu'on sait prendre pour 10f, pour 2f & pour 1f, il est facile de prendre pour toutes les autres parties de la livre; il s'agit seulement d'observer qu'en prenant la moitié, le tiers, le quart, &c. d'un nombre, les unités qui restent représentent des dixaines par rapport au chiffre qui est à la droite & auquel on les joint. Par exemple, si je veux prendre la 5e partie de 978tt, je dis: la 5e partie de 9 est 1, il reste 4 dixaines par rapport au chiffre 7 qui suit; ainsi ce reste 4 & ce chiffre 7 valent 47, dont la 5e partie est 9, que j'écris à la suite de l'unité déja trouvée; il reste

2 dixaines, que je joins au dernier chiffre 8, & j'ai 28, dont la 5e partie est 5 pour 25; il reste 3 unités de la même espece que celles du nombre proposé; si ce sont des livres, ces 3 unités valent 60^{f}, dont la 5e partie est 12^{f}, que j'écris au rang des sols; conséquemment la 5e partie de 978^{tt} est 195^{tt} 12^{f}; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

51. La preuve de la multiplication se fait par la multiplication même; pour cet effet on double un des produisans, on prend la moitié de l'autre, on fait une nouvelle multiplication de ces deux nombres, le produit doit être le même que celui de la premiere multiplication: la raison est, par exemple, que 12, multipliés par 4, doivent donner le même produit que 24, double du multiplicande 12 par 2, moitié du multiplicateur 4: on voit que chacun de ces produits est 48. Lorsqu'on aura appris la division, on sera en état de faire, par cette regle, la preuve de la multiplication. Cette derniere preuve est la plus usitée. Donnons en attendant, d'autres exemples de multiplication complexes avec leurs preuves, pour exercer les jeunes gens au calcul numérique dont on a généralement besoin dans tous les états.

52. PROB. On a 19^{t} 1^{pi} 6^{po} de terrein pour une livre, combien en aura-t-on pour 378^{tt} 12^{f} 8^{d}?

SOLUTION. On voit par l'état de la question, qu'on aura autant de fois 19^{t} 1^{pi} 6^{po} qu'il y a d'unités dans 378^{tt}, & la même partie de 19^{t} 1^{pi} 6^{po} que 12^{f} 8^{d} font de la livre; & comme 10^{f} font la moitié de la livre, ils produiront la moitié de 19^{t} 1^{pi} 6^{po}; 2 sols font la 10e partie de la livre, ils produiront donc la 10e partie de ce que produiroit la livre; savoir, dans cet exemple, la

10e partie de 19^{t} 1^{pi} 6^{po}, les 8^{d} étant le tiers de 2^{f}, donneront le tiers du produit de 2^{f}; ainsi prenant le plus grand nombre 378^{tt} 12^{f} 8^{d} pour multiplicande, le moindre 19^{t} 1^{pi} 6^{po} pour multiplicateur, les unités du produit seront de même espece que celles du multiplicateur.

Mul^{cande}	378^{tt}	12^{f}	8^{d}			. . . . . . abstrait.
Mul^{cateur}	19^{t}	1^{pi}	6^{po}			. . . . . . concret.
	3402					. . . . Produit de 9 unités.
	378					. . . . Produit de une dixaine.
	94	3^{pi}				. . . . Produit de 1 pi. 6 po. le quart des entiers du multiplicande.
	9	3	9^{po}			. . . . . Produit de 10 f. la moitié du nombre concret.
	1	5	6	7^{l}	$\frac{2}{10}$	. . Produit pour 2 f., le dixieme du multiplicateur.
	0	3	10	2	$\frac{4}{10}$	. . Produit de 8 d., le tiers du produit de 2 f.
Prod.	7288^{t}	4^{pi}	1^{po}	9^{l}	$\frac{6}{10}$ ou $\frac{3}{5}$	
	189^{tt}	6^{f}	4^{d}			. . . . . . Moitié du multiplicande abstrait.
	38^{t}	3^{pi}				. . . . Double du multiplicateur concret.
	1512					. . . . Produit de 8 unités.
	567					. . . . De 3 dixaines.
	94	3^{pi}				. . . . De 3 pi., moitié des entiers du nombre abstrait.
	9	3	9^{po}			. . . . . De 5 f., quart du nombre concret.
	1	5	6	7	$\frac{1}{5}$	. . De 1 f, le cinquieme du produit de 5 sols.
	0	3	10	2	$\frac{2}{5}$	. . De 4 d., le tiers du produit de 1 sol.
Prod.	7288^{t}	4^{pi}	1^{po}	9^{l}	$\frac{3}{5}$	Preuve.

Procédé. Je multiplie les entiers à l'ordinaire (40 & 41); je regarde le multiplicande comme un nombre abstrait; j'observe que 1^{pi} 6^{po} étant le quart de la toise, doivent produire le quart des entiers du multiplicande considérés comme unités concretes, & ici comme des toises; je

dis donc : le quart de 37 est 9, il reste 1 qui vaut 10 & 8 font 18, dont le quart est 4; il reste 2 toises, qui valent 12 pieds, dont le quart est 3 pieds; je passe aux parties abstraites du multiplicande; j'observe que $12^{f}\ 8^{d}$ sont composés de 10^{f}, moitié de la livre, de 2^{f}, 10e partie de la livre, & de 8^{d}, tiers de 2^{f}; & comme une livre produiroit le multiplicateur $19^{t}\ 1^{pi}\ 6^{po}$, 10^{f} donneront la moitié de ce nombre, $9^{t}\ 3^{pi}\ 6^{po}$; 2^{f} produiront la 10e partie, savoir $1^{t}\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 7^{l}\ \frac{1}{5}$ de ligne, & les 8^{d} donneront le tiers de ce produit, savoir $3^{pi}\ 10^{po}\ 2^{l}\ \frac{2}{5}$; j'observe de placer, comme on le voit ici, ces produits particuliers dans l'ordre de la numération; j'en fais l'addition, & j'ai pour résultat $7288^{t}\ 3^{pi}\ 1^{po}\ 9^{l}\ \frac{3}{5}$, terrein qu'on aura pour $378^{tt}\ 12^{f}\ 8^{d}$. C. Q. F. Dét.

Pour la preuve, je prends la moitié $189^{tt}\ 6^{f}\ 4^{d}$ du multiplicande $378^{tt}\ 12^{f}\ 8^{d}$, & le double $38^{t}\ 3^{pi}$ du multiplicateur $19^{t}\ 1^{pi}\ 6^{po}$; je multiplie les entiers à l'ordinaire (40 & 41); je prends pour 3^{pi} la moitié de 189, considérés comme des toises, & j'ai $94^{t}\ 3^{pi}$, pour les $6^{f}\ 4^{d}$ du multiplicande; je prends pour 5^{f} le quart du multiplicateur $38^{t}\ 3^{pi}$, & j'ai $9^{t}\ 3^{pi}\ 9^{po}$; pour 1^{f}, le 5e de ce produit, j'ai $1^{t}\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 7^{l}\ \frac{1}{5}$; pour 4^{d}, le tiers de ce produit, j'ai $3^{pi}\ 10^{po}\ 2^{l}\ \frac{2}{5}$; j'ajoute tous ces produits, & j'ai $7288^{t}\ 4^{pi}\ 1^{po}\ 9^{l}\ \frac{3}{5}$, qui est le même produit qu'on a trouvé dans la premiere multiplication, ce qui prouve qu'elle a été bien faite. C. Q. F. Dét.

53. PROBLÊME. On demande combien coûteront 76985 rations $\frac{1}{4}$ de pain, à raison de $6^{f}\ 4^{d}$ la ration.

SOLUTION. On voit par l'état de la question, que les unités du produit seront des livres, ou

des fois, & [illegible]
y a de [illegible]
765 [illegible]
[illegible]

Produit [illegible]

Preuve. Comme [illegible]
exacte de la [illegible]
j'observe que [illegible]
ration, [illegible]
rations ; & comme [illegible]
ils produisent [illegible]
donc [illegible]
chiffre suivant [illegible]
que je pose [illegible]
9 est 2, [illegible]
donc le [illegible]
joins au chiffre suivant [illegible]
est 6 ; [illegible]
5, que je [illegible]

Il reste à [illegible]
de la [illegible]
chiffre 5 ; je [illegible]
précédent, en [illegible]
droite (4 [illegible]
que je pose [illegible]
vaut 10, & 6 font 6 [illegible]

dis donc : le quart de 37 est 9, il reste 1 qui vaut 10 & 8 font 18, dont le quart est 4; il reste 2 toises, qui valent 12 pieds, dont le quart est 3 pieds; je passe aux parties abstraites du multiplicande; j'observe que 12^{s} ... t composés de 10^{s}, moitié de la livre, de 2 ... rtie de la livre, & de 8^{d}, tiers ... com ... vre p ... roit ... pi-

le multiplica ... ^{pi} 6 ... ner ... la

tié de ce n ... 3 ... pro ... es

10e partie ... ^{pi} ... e li ... ^{pi}

8^{d} donnero ... d ... it ... le

$10^{po}\ 2^{l}\ \frac{2}{5}$; ... de ... co ... re

voit ici, c ... d ... ır

de la numér ... fa ... ra

résultat 72 ...

pour 378# ...

Pour la ...

$6^{s}\ 4^{d}$ du mu ...

$38^{t}\ 3^{pi}$ du m ...

les entiers ...

pour 3^{pi} la ...

des toises, ...

tiplicande; j ...

cateur 38^{t} 3 ...

de ce produ ...

de ce produ ...

produits, & ...

produit qu' ...

... ation, ...

... F. D ...

... PRO ...

... 8

des ſols, & qu'on aura autant de fois $6^{ſ}\ 4^{d}$ qu'il y a de rations, ou d'unités dans le multiplicande 76985 rations $\frac{1}{4}$ de ration. Il s'agit donc de multiplier 76985 rat. $\frac{1}{4}$ par $6^{ſ}\ 4^{d}$.

	76985 rat. $\frac{1}{4}$			multiplicande abſtrait.
	0^{tt}	$6^{ſ}$	4^{d}	multiplicateur conc.
	19246^{tt}	$5^{ſ}$	. . .	Produit de 5 ſ. & quart du multiplicande.
	3849	5	. . .	Produit de 1 ſ. & vingtieme des entiers du multiplicande.
	1283	1	8^{d}	Produit de 4 d & tiers du produit de 1 ſ.
	0	1	7	Produit de 1 quart de ration, quart du multiplicateur.
…duit	24378^{tt}	$13^{ſ}$	3^{d}	ou prix des 76985 rations & quart, à 6 ſ. 4 d.

Procédé. Comme $6^{ſ}\ 4^{d}$ ne ſont pas une partie …ste de la livre, je partage $6^{ſ}$ en parties exactes; …bſerve que ſi on donnoit une livre de chaque …ion, il faudroit donner 76985^{tt} pour 76985 …ions; & comme $5^{ſ}$ ſont le quart de la livre, …produiront le quart de cette ſomme; je dis …nc: le quart de 7 eſt 1, il reſte 3 dixaines, & le …ffre ſuivant 6 font 36, dont le quart eſt 9, … je poſe ſous le 6; le quart du chiffre ſuivant … 2, il reſte 1, & le chiffre ſuivant 8 font 18, … le quart eſt 4; il reſte 2 dixaines, que je … au chiffre ſuivant 5; j'ai 25, dont le quart …; il reſte 1^{tt} qui vaut $20^{ſ}$, dont le quart eſt …ue je poſe au rang des ſols.

…reſte à prendre pour $1^{ſ}$, qui eſt la 20e partie … livre; pour cet effet je retranche le dernier … 5; je prends la moitié des chiffres qui …ent, en rétrogradant d'un rang ſur la … 7); je dis donc: la moitié de 7 eſt 3, …e ſous le rang ſuivant; il reſte 1 qui …c 6 font 16, dont la moitié eſt 8; la

moitié de 9 eſt 4, il reſte 1 qui vaut 10, & [illegible] font 18, dont la moitié eſt 9; je poſe le chiffre retranché 5 au rang des ſols; ainſi le produit d'un ſol eſt 3849^{tt} 5^{ſ}; les 4^{d} donnent le tiers de ce produit, ſavoir, 1283^{tt} 1^{ſ} 8^{d}; le $\frac{1}{4}$ de ration donne le quart du prix de la ration ou du multiplicateur 6^{ſ} 4^{d}; je dis donc: le quart de 6^{ſ} eſt 1^{ſ}, il reſte 2^{ſ}, qui valent 24^{d} que je joins aux 4^{d} du multiplicateur, & j'ai 28^{d}, dont le quart eſt 7^{d}. Le réſultat de tous ces produits eſt 24378^{tt} 13^{ſ} 3^{d}, valeur de 76985 rations $\frac{1}{4}$, à raiſon de 6^{ſ} 4^{d} la ration. C. Q. F. Dét.

54. Pour faire la preuve, je multiplie le double du nombre des rations 76985 $\frac{1}{4}$ par la moitié du prix 6^{ſ} 4^{d} de la ration, ſavoir, 153970 rations $\frac{1}{2}$ par 3^{ſ} 2^{d}, comme on voit.

	153970 rat. $\frac{1}{2}$			multiplicande abſtrait
	0^{tt}	3^{ſ}	2^{d}	multiplicateur conc[ret]
	15397	. . .	. . .	Produit de 2 ſ., & dixieme du multiplicande.
	7698	10.	. .	De 1 ſ., & moitié du produit 2 ſ.
	1283	1	8^{d}	De 2 d., & ſixieme du produit de 1 ſ.
	0	1	7	De demi ration, & moitié du multiplicateur.
Produit	24378^{tt}	13^{ſ}	3^{d}	Preuve.

Procédé. Je prends pour 2^{ſ} le 10e des entiers du multiplicande, conſidérés comme des livres; je retranche donc le dernier chiffre zéro, & j'écris les précédens tels qu'ils ſont; j'ai 15397^{tt}; je prends pour 1^{ſ} la moitié de ce produit, diſant la moitié de 15 eſt 7, que je poſe ſous le 5; il reſte 1 qui vaut 10, & 3 font 13, dont la moitié eſt 6; il reſte 1 qui vaut 10, & 9 font 19, dont la moitié eſt 9; il reſte 1 qui vaut 10, & 7 font

17, dont la moitié est 8; il reste 1tt qui vaut 20f, dont la moitié est 10f, que j'écris au rang des sols; je passe aux 2d, qui font la 6e partie de 1f; je prends donc la 6e partie du produit 7698tt 10f, d'un sol; disant le 6e de 7 est 1, il reste 1 qui vaut 10, & 6 font 16, dont le 6e est 2; il reste 4 qui valent 40, & 9 font 49, dont le 6e est 8; il reste 1 qui vaut 10, & 8 font 18, dont le 6e est 3tt; le 6e de 10f est 1f; il reste 4f qui valent 48d, dont le 6e est 8d, que je pose au rang des deniers: la demi-ration donne la moitié de 3f 2d, prix de la ration, savoir 1f 7d: la somme de tous ces produits est 24378tt 13f 3d, comme dans la premiere regle, ce qui en est la preuve. C. Q. F. Dét.

55. Déf. Un nombre multiplié par lui-même produit son *quarré*, & ce nombre en est la *racine quarrée*; le *cube* d'un nombre est le résultat de ce nombre multiplié successivement deux fois par lui-même; & ce nombre en est la *racine cube*; 6 est la racine quarrée de $36 = 6 \times 6$; 5 est la racine quarrée de $25 = 5 \times 5$; 9 est celle de $81 = 9 \times 9$; de même 6 est la racine cube de $216 = 6 \times 6 \times 6$; 9 est la racine cube de $729 = 9 \times 9 \times 9$; 10 est la racine quarrée de $100 = 10 \times 10$, & la racine cube de $1000 = 10 \times 10 \times 10$.

56. *Principe dont on fera usage pour extraire la racine quarrée d'un nombre quelconque.*

Le quarré d'un nombre composé de dixaines & d'unités, contient, 1°. le quarré des dixaines qui occupe le rang des centaines (parce que des dixaines multipliées par des dixaines donnent des centaines); 2°. le double des dixaines multiplié par les unités, qui occupe le rang des dixaines;

3°. le quarré des unités, qui occupe le rang des unités.

48 nombre composé de 4 dixaines & de 8 unit.

Pl. 1, fig. 5. 16 . . = 4 × 4 . . quarré des 4 dixaines ABOF.

64 = 2 × 4 × 8 double des 4 dixaines multip. par les 8 un. OBCH + OFEG.

64 = 8 × 8 . . quarré des 8 unités OHDG.

2304 quarré de 48 ; on trouvera en effet, qu'en multipliant 48 par 48, on aura le même résultat 2304, comme on voit ci-dessous.

48
48
384
192
2304 comme ci-dess. quarré de 48. C. Q. F. B. R.

57. *Principe dont on fera usage pour tirer la racine cube d'un nombre quelconque.*

Le cube d'un nombre composé de dixaines & d'unités, contient, 1°. le cube des dixaines qui occupe le rang des mille (parce que le cube de 10 est 1000) ; 2°. trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, qui occupe le rang des centaines ; 3°. trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités, qui occupent le rang des dixaines ; 4°. le cube des unités, qui occupe le rang des unités.

46

4 × 4 × 4 = 64 . . . Cube des 4 dixaines.

3 × 4 × 4 × 6 = 288 . . 3 fois le quarré des dixaines multip. par les unit.

3 × 4 × 6 × 6 = . 432 . 3 fois les dixaines multip. par le quarré des unit.

6 × 6 × 6 . . = . . 216 Cube des unités.

97336 Cube de 46.

Si on fait la multiplication à l'ordinaire, on trouvera que $46 \times 46 \times 46 = 97336$; comme on le verra ci-après développé de deux manieres.

Premiere maniere

```
   46
   46
 ----
  276
 184     Quarré.
 ----
 2116
 ----
   46
 ----
12696
8464
-----
97336   Cube de 46.
```

2e maniere.

```
      46
      46
     ----
   ⎧ 36 . . . . . . . . . . . 216 cube des unités.
   ⎪ 24 . . . . . . . . . . . 144 . . . . ⎫ Trois fois le quarré
46×⎨ 24 . . . . . . . . . . . 144 . . . . ⎬ des unités par les di-
   ⎩ 16 . . . . . . . . . . . 144 . . . . ⎭ xaines.
     ----
          . . . . . . . . 96 . . . ⎫ Trois fois le
          . . . . . . . . 96 . . . ⎬ quarré des dixaines
          . . . . . . . . 96 . . . ⎭ par les unités.
          . . . . . . . 64 . . . . . Cube des dixaines.
          --------------------
                  97336 . . Cube de 46.
```

On voit dans la seconde maniere que le cube d'un nombre 46, composé de quatre dixaines & de six unités, contient huit produits partiels.

1°. Le cube 216 des unités qui occupe le rang des unités.

2°. Trois fois 144, quarré des 6 unités multiplié par les 4 dixaines, qui est au rang des dixaines.

3°. Trois fois 96, quarré des 4 dixaines multiplié par les 6 unités, qui occupe le rang des centaines.

4°. Le cube 64 des 4 dixaines, qui occupe le rang des mille; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

58. DÉF. On appelle, en général, *puissance* d'un nombre, le résultat de ce nombre multiplié successivement une, ou plusieurs fois par lui-même; ce nombre est la *racine* de cette puissance qui prend son nom de la quantité de fois que le nombre est *facteur* ou produisant; $8 \times 8 = 64$, est le quarré ou la seconde puissance de 8; de même $9 \times 9 \times 9 = 729$, est le cube ou la 3e puissance de 9; la 4e puissance est $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4 = 6561$; la 5e puissance est $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5 = 59049$; cette expression 9^5 désigne qu'on doit élever 9 à la 5e puissance; le nombre 5 écrit à la suite de 9, un peu au dessus, se nomme *exposant* de la puissance de 9; il indique que 9 est 5 fois facteur dans sa 5 puissance, 6 fois dans sa 6e, 7 fois dans sa 7e puissance, &c. Si on veut indiquer la 4e, 5e, 6e, 7e puissance d'un nombre composé de dixaines & d'unités, on tire une ligne sur le nombre, & à l'extrémité on écrit l'exposant; par exemple, $\overline{248}^5$ désigne qu'on doit élever 248 à la 5e puissance; $\overline{19}^7$ indique la 7e puissance de 19, & $\overline{37}^{12}$ la 12e puissance de 37, &c. Ceci nous servira dans la suite; il est essentiel de s'en

J'ai	54^{t}	5^{pi}	4^{po}		.. Multiplicande concret; je prends la moitié du multiplicateur.
J'ai	9^{t}	1^{pi}	9^{po}		.. Multiplicateur abstrait.
	494^{t}	0^{tpi}	0^{tpo}		.. Produit de 54^{t} 5^{pi} 4^{po} par les entiers 9 du multiplicateur.
	9	0	10	8^{tlig}	Produit de 1^{pi}, la 6e partie du multiplicande.
	4	3	5	4	.. Produit de 6^{po}, la moitié de celui d'un pied.
	2	1	8	8	.. Produit de 3^{po}, la moitié de celui de 6^{po}.
	510^{tt}	0^{tpi}	0^{tpo}	8^{tlig}	Preuve.

Procédé. Toutes les fois que le multiplicateur n'excede pas 12, ou qu'il n'a qu'un chiffre, il doit multiplier le multiplicande, commençant par la plus petite espece; cela abrege; je dis donc: 9 fois 4 font 36^{tpo} ou 3^{tpi}, je pose zéro, je retiens 3^{tpi}; je dis: 9 fois 5^{tpi} font 45^{tpi}, & 3^{tpi} de retenus font 48^{tpi} ou 8^{tt}; je pose zéro au rang des toises pieds, je retiens 8^{tt}: 9 fois 4 font 36, & 8 de retenus font 44, je pose 4, je retiens 4: 9 fois 5 font 45, & 4 de retenus font 49; je pose 9 & avance 4; je prends pour un pied le 6e du multiplicande, ce qui me donne 9^{tt} 0^{tpi} 10^{tpo} 8^{tl}; je prends pour 6^{po} la moitié du produit d'un pied, & j'ai 4^{tt} 3^{tpi} 5^{tpo} 4^{tl}; je prends pour 3^{po} la moitié du produit de 6^{po}, & j'ai 2^{tt} 1^{tpi} 8^{tpo} 8^{tl}; j'ajoute ensemble tous ces produits: le résultat est 510^{tt} 0^{tpi} 0^{tpo} 8^{tl} comme ci-dessus; ce qui prouve que les deux regles sont bien faites.

60A. PROB. Combien coûteront 5^{pi} 7^{po} d'un certain fossé, à raison de 19^{f} 9^{d} la toise?

Multiplicande	0^{tt}	19^{f}	9^{d}	concret.
Multiplicateur	0^{t}	5^{pi}	7^{po}	abſtrait.
	0^{tt}	9^{f}	$10^{d}\ \frac{1}{2}$ ou $\frac{12}{24}$	
		6	7	
		1	$7\ \frac{3}{4}$ ou $\frac{18}{24}$	
			$3\ \frac{7}{24} \ldots \frac{7}{24}$	
	0^{tt}	18^{f}	$4^{d}\ \frac{13}{24}$	Produit.

Procédé. Je prends pour 3^{pi} la moitié du multiplicande $19^{f}\ 9^{d}$; j'ai $9^{f}\ 10^{d}\frac{1}{2}$, que j'écris ſous la ligne ; je prends pour 2^{pi} le tiers du multiplicande $19^{f}\ 9^{d}$; j'ai $6^{f}\ 7^{d}$; je prends pour 6^{po} le quart du produit de 2^{pi}, j'ai $1^{f}\ 7^{d}\frac{3}{4}$ de denier ; je prends pour 1^{po} le 6e du produit des 6^{po}, j'ai $3^{d}\ \frac{7}{24}$ de denier ; je fais l'addition de tous ces produits particuliers, j'ai $18^{f}\ 4^{d}\frac{13}{24}$ de denier. On fera la preuve par la diviſion dans la ſuite.

61. PROB. Multiplier ſucceſſivement l'une par l'autre les trois lignes qui forment les dimenſions d'un corps.

SOLUTION. 1°. On conſidere une de ces 3 lignes comme contenant des unités & des parties d'unités cubes (1) ; les deux autres lignes comme ne contenant que des unités & des parties d'unités abſtraites.

Par exemple, on propoſe de multiplier une ligne

(1) Parce que dans la meſure des corps, on cherche combien ce corps renferme de toiſes cubes, toiſes, toiſes-pieds, &c. & que ce nombre eſt donné par le produit des trois dimenſions du corps.

48^{t} 3^{pi} 8^{po} considérées comme des toises & parties de toises cubes; longueur.

ar 24^{t} 2^{pi} 8^{po} unités & parties d'unités abstraites; largeur.

192
96
16 1 2 8 . . . Produit de 2^{pi}, & tiers de tout le multiplicande.
5 2 4 10 8.. Produit de 8^{po}, & tiers de celui de 2^{pi}.
12 . . . . Prod. de 3^{pi}, & moitié des entiers du multiplicateur.
2 . . . . Prod. de 6^{po}, & 6e de celui de 3^{pi}.
0 4 . . . . Prod. de 2^{po}, & tiers de celui de 6^{po}.

1188^{ttt} 1^{ttpi} 7^{ttpo} 6^{ttlig} 8^{ttpts} toises cubes, & parties de toise cube; multiplicande.
18^{t} 1^{pi} 6^{po}. . . . . unités abstraites, hauteur; multiplicateur.

9504
1188
297 0 4 10 8.. Produit de 1^{pi} 6^{po}, c'est le quart du multiplicande.
3 . . . . Pour 1^{pi}, le 6e des entiers du multiplicateur.
1 3 . . . . Pour 6^{po}, la moitié du produit de 1^{pi}.
0 1 6 . . . . Pour 1^{po}, le 6e du produit de 6^{po}.
. . 9 . . . . Pour 6^{lig}, la moitié du produit de 1^{po}.
. . 1 . . . . Pour 8^{pts}, le 9e du pr. de 6^{lig}.

21685^{ttt} 5^{ttpi} 8^{ttpo} 10^{ttlig} 8^{ttpts} Produit en toises cubes & parties de toises cubes.

Le produit des trois lignes proposées est donc de 21685 toises cubes 5 pi. 8 po. 10 lign. 8 points de toise cube : donc $(48^{t}\ 3^{pi}\ 8^{po}) \times (24^{t}\ 2^{pi}\ 8^{po}) \times (18^{t}\ 1^{pi}\ 6^{po}) = 21685$ toises cubes 5 pi. 8 pou. 10 lignes 8 points de toise cube ; ainsi des autres.

62. REM. & DÉF. On a vu (55, 56, 57, 58 & 59) 1°. qu'une ligne multipliée par elle-même étoit le quarré de cette ligne ; ainsi une toise multipliée par une toise produit une toise quarrée ou 36 pieds quarrés, ou 6 pieds de toise quarrée, ou 6 toises pieds ; 2°. qu'une toise multipliée successivement deux fois par elle-même, produit une toise cube, c'est-à-dire un corps ou solide qui a une toise quarrée de base & une toise ou 6 pieds de hauteur ; de sorte qu'une toise cube contient 216 pieds cubes, ou 6 pieds de toise cube, dont chacun vaut 36 pieds cubes : on voit donc que le pied de toise cube est un solide qui a une toise quarrée de base & un pied de hauteur ; que le pouce de toise cube est un solide qui a une toise quarrée de base & un pouce de hauteur ; ainsi des lignes & des points de toise cube.

63. On a vu aussi (17) qu'une solive est un corps ou solide rectangulaire qui a un pied de largeur, six pouces d'épaisseur & une toise de hauteur, & qui contient trois pieds cubes, ou, ce qui revient au même, qu'une solive est un corps de 72 pouces quarrés de base & une toise de hauteur : donc le pied de solive, qui est la sixieme partie de la solive, est un corps qui a un pouce d'épaisseur, un pied de largeur, & une toise de hauteur ; & comme le pouce de solive est le douzieme du pied de solive, il a un pouce quarré de base & une toise de hauteur, &c ; ensorte 1°. qu'un pied cube vaut deux pieds de solive ;

ſolive ; 2°. qu'un pouce de pied cube vaut deux pouces de ſolive ; 3°. qu'une ligne de pied cube vaut deux lignes de ſolive, &c. Cela bien compris, il ſera facile de faire le toiſé des ſurfaces, des ſolides, & celui des bois qui ſe fait en ſolives, dès qu'on ſaura les élémens de Géométrie; ſur-tout ſi l'on fait attention, 1°. qu'une toiſe cube, contenant 216 pieds cubes, vaut 72 ſolives, tiers de 216; 2°. que le pied de toiſe cube étant de 36 pieds cubes, vaut 72 pieds de ſolive, puiſque le pied de ſolive ne vaut qu'un demi-pied cube ; 3°. conſéquemment que le pouce de toiſe cube, 12e partie du pied de toiſe cube, vaut 72 fois un pouce de ſolive, 12e partie d'un pied de ſolive; ainſi des lignes & des points, &c ; c'eſt-à-dire qu'il n'y a qu'à multiplier les toiſes cubes, les pieds, les pouces, les lignes, les points de toiſé cube par 72, conſidéré comme nombre abſtrait ; le produit donnera des ſolives, des pieds, des pouces, des lignes, &c. de ſolive ; ou ſi l'on fait attention qu'une toiſe vaut 72 pouces, on pourra, pour abréger le calcul dans le toiſé des bois, regarder une des dimenſions de l'*équarriſſage*, priſe en pouces, comme des toiſes, & les lignes, s'il y en a, comme des demi-pieds chacune, & multiplier ſucceſſivement les trois dimenſions enſemble (61); le réſultat donnera des ſolives, des pieds, des pouces, des lignes de ſolive. L'exemple ſuivant va éclaircir ce principe.

64. PROB. Déterminer combien une poutre de 34 pieds de longueur ſur 18 & 20 pouces d'équarriſſage contient de ſolives, de pieds, de pouces, &c. de ſolive.

SOLUTION. Je regarde les 20 pouces d'une

des dimensions de l'équarrissage comme 20 toises, & je fais la multiplication à l'ordinaire.

20^{t}			. . . . Multiplicande.
5^{t}	4^{pi}		. . . . . Multiplicateur, longueur de la poutre.
100^{t}			. . . . Produit de 5 toises.
6	4		. . . . Prod. de 2^{pi}, le tiers du mutiplicande.
6	4		. . . . *Idem.*
113^{t}	2^{pi}		
0^{t}	1^{pi}	6^{po}	. . . $= 18^{po}$, 2e dimension de l'équarrissage; $mult^{teur}$.
$28^{solives}$	2^{pi} de solive.		Prod. de 1^{pi} 6^{po}, le quart du multiplicande.

Cette piece de bois contient donc 28 solives & 2 pieds de solive.

Pour vérifier si cette méthode est exacte, déterminons (61) les toises cubes, ou parties de toise cube que contient cette piece de bois; pour cet effet je mutiplie 1°. sa longueur 5^{t} 4^{pi} par 1^{pi} $6^{po} = 18^{po}$, le produit est . . . .

. . . 1^{tt} 2^{tpi} 6^{tpo} . . . que je multiplie par $20^{po} = 1^{pi}$ 8^{po}.

0^{t}	1^{pi}	8^{po}		
0	1	5		. . . . Prod. de 1^{pi}, le 6e du multiplicande.
		5	8	. . Prod. de 4^{po}, le tiers de celui de 1^{pi}.
		5	8	. . *Idem.*
0^{ttt}	2^{ttpi}	4^{ttpo}	4^{ttlig}	résultat des 3 dimensions

qu'il faut multiplier par le nombre abstrait 72, considéré comme des solives.

72 ^{solives} . . . . Multiplicande.
0^{ttt} 2^{ttpi} 4^{ttpo} 4^{ttlign} . . Multiplicateur abstr.

24 ^{solives} . . . . . Prod. de 2^{ttpi}, tiers de la toise cube ; le tiers du multip^{cande}.
4 . . . . Prod. de 4^{ttpo}, le 6e de celui de 2^{ttpi}.
0 2$^{\text{pi. de solive}}$ Prod. de 4^{ttlig}, le 12e du prod. de 4^{ttpo}.

28 ^{solives} 2$^{\text{pi. de solive}}$, contenu de la piece de bois proposée, qui est le même que ci-dessus ; on doit donc conclure que ces deux méthodes de calculer les bois sont exactes ; nous aurons occasion d'en faire l'application dans la Géométrie.

65. PROB. On demande le prix de 368 cordes un quart de bois, à raison de 38^{tt} 0^{f} 8^{d} la corde.

SOLUTION. On voit par l'état de la question qu'on doit répéter 38^{tt} 0^{f} 8^{d} autant de fois qu'il y a d'unités & de parties d'unité dans 368 $\frac{1}{4}$ regardé comme un nombre abstrait ; j'écris donc :

368 ^{cordes} $\frac{1}{4}$ . . . Multiplicande abstrait.
38^{tt} 0^{f} 8^{d} . . Multiplicateur concret.

2944 . . . . Prod. de 8 unités.
1104 . . . . de 3 dixaines.
36 16 . . . . Faux prod. de 2^{f}, le 10e des entiers du multiplicande.
12 5 4 . . Prod. de 8^{d}, le tiers du faux produit de 2^{f}.
9 10 2 . . Prod. du quart de la corde, le quart de tout le mul^{teur}.

14005^{tt} 15^{f} 6^{d} . . Prod. valeur des 368 cordes $\frac{1}{4}$, à 38^{tt} 15^{f} 6^{d} la corde.

Dans cet exemple, comme il n'y a pas de sols, je fais un faux produit de 2 sols ; c'est-à-dire, que j'opere comme s'il y avoit 2 sols : je prends donc le 10e des entiers du multiplicande, considérés comme des livres, j'ai 36tt 16f, dont je coupe les chiffres par un trait, pour ne point les comprendre dans l'addition, & j'observe que 8d étant le tiers de 2f, doivent donner le tiers de ce faux produit, savoir 12tt 5f 4d ; le quart de la corde doit donner le quart de la valeur de la corde, savoir 9tt 10f 2d, quart de 38tt 0f 8d, &c.

Pour faire la preuve, j'écris . . . . . .

736 cordes ½ . . .	Double du multiplicande abstrait.
19tt 0f 4d . .	Moitié du multiplicateur concret.
6624tt	
736	
9 10 2 . .	Produit de la demi-corde ; la moitié du multiplicateur.
~~36~~ ~~16~~	Faux prod. de 1f, le 20e des entiers du multiplicande.
12 5 4 . . .	Prod. de 4d, le tiers du faux produit d'un sol.
14005tt 15f 6d . . .	Preuve.

66. Il est bon de prévenir une difficulté qui pourroit arrêter les commençans : on sait que si on multiplie un *tout* par lui-même d'une part, & toutes ses parties par elles-mêmes d'une autre part, les produits doivent être égaux ; car le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble ; & si on multiplie des grandeurs égales par

des grandeurs égales, les produits ſeront égaux; cela poſé, $1^{tt} = 20^{ſ}$: or, dira-t-on, 1^{tt} multipliée par 1^{tt} ne produit que 1^{tt}, parce que l'unité multipliée par elle-même une ou pluſieurs fois ne produit que l'unité; au contraire $20^{ſ}$ multipliés par $20^{ſ}$ produiſent $400^{ſ}$ ou 20^{tt}; il faudroit donc que le prod. 1^{tt}, de 1^{tt} multipliée par 1^{tt} égalât 20^{tt}, ce qui eſt abſurde; cependant ces deux produits devroient être égaux. Ils le ſeroient auſſi, parce que 1^{tt} multipliée par 1^{tt} donne une unité quarrée (55), c'eſt-à-dire une livre quarrée; & comme une livre ſimple, vaut 20 ſols, une livre quarrée vaut vingt fois 20 ſols ou 400 ſols quarrés; mais comme il n'y a ni ſols ni livres quarrés dans la nature, ces ſortes de produits n'exiſtent pas; auſſi n'arrive-t-il jamais qu'on ait à multiplier 1^{tt} uniquement par 1^{tt}, mais bien 1^{tt} à prendre une fois ou pluſieurs fois; alors la difficulté ci-deſſus diſparoît : car prendre 1^{tt} une fois donne 1^{tt}, & prendre ſa valeur $20^{ſ}$ une fois donne $20^{ſ} = 1^{tt}$. Ainſi toutes les fois qu'on aura des livres, ſols & deniers, &c. à multiplier par des livres, ſols & deniers, &c. l'état de la queſtion fera connoître qu'un des deux nombres propoſés doit être regardé comme abſtrait. Par exemple, on ſait qu'une livre gagne dans un commerce de mer $29^{tt}\ 6^{ſ}\ 8^{d}$ par an : on demande combien gagneront $69^{tt}\ 6^{ſ}\ 3^{d}$.

SOLUTION. On voit par l'état de la queſtion, qu'on doit répéter le gain d'une livre, ſavoir, $29^{tt}\ 6^{ſ}\ 8^{d}$ autant de fois qu'il y a de livres & de parties de livre dans $69^{tt}\ 6^{ſ}\ 3^{d}$; ſavoir, 69 fois, un quart de fois pour $5^{ſ}$, & un quart du produit de 5 ſols pour $1^{ſ}\ 3^{d}$.

29^{tt}	6^{s}	8^{d}	.. Multiplicande concret.
69^{tt}	6^{s}	3^{d}	.. Multiplicateur abſtrait.
261^{tt}			. . . . . . Produit de 9 unités.
174			. . . . de 6 dixaines.
23			. . . . Prod. de 6^{s} 8^{d}, le tiers des entiers du multiplicateur.
7	6	8	.. Prod. de 5^{s}, le quart de tout le multiplicande.
1	16	8	.. Prod. de 1^{s} 3^{d}, le quart du produit de 5^{s}.
2033^{tt}	3^{s}	4^{d}	.. Produit.

67. *Principe.* 1°. Si des unités ſont multipliées par des pieces de deux ſols, ou des pieces de deux ſols par des unités, le produit donne autant de livres qu'il contient de dixaines, & le double de l'excédent des dixaines donne des ſols; 2°. ſi des dixaines ſont multipliées par des pieces de deux ſols, ou des pieces de deux ſols par des dixaines, le produit ſera des livres (parce que deux fois 10 ſols font une livre); 3°. ſi des pieces de 2^{s} multiplient des centaines, le produit eſt des dixaines (parce que cent fois 2^{s} font 10^{tt}); 4°. ſi des pieces de 2^{s} multiplient des mille, le produit eſt des centaines, parce que mille pieces de 2^{s} font 100^{tt}; ainſi des dix mille, des cent mille, &c.

68. Ce principe fera connoître aux Financiers, aux Commerçans & Gens d'affaires, la raiſon de la méthode abrégée dont ils font uſage dans la multiplication par les ſols, pour avoir au produit des livres, & cela par une ſeule opération, ſi le nombre des ſols eſt pair, ou par deux opérations, s'il eſt impair. Par exemple, 1°. on de-

mande combien coûteront 4758 ℔ de fucre, à 18ſ la livre; on voit par l'état de la queſtion, qu'il faut répéter 18ſ autant de fois qu'il y a d'unités dans 4758. Je diſpoſe ces nombres à l'ordinaire.

9 4758 ℔	de ſucre..	Multiplicande abſtrait.
o	18ſ	Multiplicateur concret.
4282 ₶	4ſ.....	Produit.

Procédé. J'obſerve que 18ſ font 9 pieces de 2ſ; après avoir poſé ce 9 ſur les unités du multiplicande, je le coupe par un trait, & je multiplie par ce même 9 le multiplicande. Je dis donc: neuf fois 8 font 72 pieces de 2ſ, ou 7₶ 4ſ; je poſe 4 au rang des ſols, & retiens 7₶; neuf fois 5 font 45, & 7 de retenus font 52₶, je poſe 2₶ au rang des unités; je retiens 5: 9 fois 7 font 63, & 5 de retenus font 68 dixaines, je poſe 8 & retiens 6: neuf fois 4 font 36, & 6 de retenus, font 42, je poſe 2 & avance 4; le produit eſt donc 4282₶ 4ſ, valeur de 4758 livres de ſucre, à 18ſ la livre.

2°. Combien coûteront 79047₶ de café à 17ſ la livre?

8 79047 ℔	café ...	Multiplicande abſtrait.
o	17ſ ...	Multiplicateur concret.
63237₶	12ſ ...	Prod. de 16ſ, ou de 8 pieces de 2ſ.
3952	7....	Prod. de 1ſ, le 20e du multiplicande.
67189₶	19ſ ...	Prod. ou valeur de 79047 ℔ de café, à 17ſ la livre.

69. PROB. Faire la retenue des 4 deniers pour livre d'une somme quelconque :

79048^{tt} *par exemple :*

1317^{tt} 9^{f} 4^{d}.. Résultat de la retenue de 4^{d} pour livre de 79048^{tt}.

SOLUTION. J'observe que 4^{d} étant le tiers de 1^{f}, sont la 60e partie de 20^{f} ou d'une livre ; ainsi que pour résoudre cette question il ne s'agit que de prendre d'une maniere simple le 60e de 79048 ; pour cet effet, je considere que si je retranche le chiffre des unités 8 par un trait, je rends ma somme dix fois plus petite, & qu'en prenant le 6e de ceux qui précedent le chiffre retranché, je les rends soixante fois plus petits, ou j'en prends le 60e, & le résultat sera des livres ; je dis donc : le 6e de 7 est 1, que j'écris sous le 7 ; il reste 1 qui vaut 10, par rapport au chiffre 9 qui suit, j'ai 19, dont le 6e est 3, que j'écris sous 9 ; il reste 1 qui vaut 10, & 0 font 10, dont le 6e est 1 ; il reste 4 qui valent 40, & 4 font 44, dont le 6e est 7^{tt} ; il reste 2, qui valent deux sixiemes ou le tiers de la livre, ou 6^{f} 8^{d}, à quoi j'ajoute autant de fois 4^{d} qu'il y a d'unités dans le chiffre retranché 8 ; ici 2^{f} 8^{d} ; j'ai donc pour ces deux restes 9^{f} 4^{d}, que j'écris à la suite de 1317^{tt} ; ainsi la retenue des 4^{d} pour livre sur la somme de 79048^{tt} est 1317^{tt} 9^{f} 4^{d}.

AUTRE SOLUTION. Je regarde le nombre de livres proposé 79048^{tt} comme des sols, j'en prends le tiers, j'ai 26349^{f} 4^{d} que je réduis en livres (47), & j'ai 1317^{tt} 9^{f} 4^{d} comme ci-dessus.

79048##	Regardées comme des sols.
26349ˢ 4ᵈ . . .	Valeur en sols de la 60ᵉ partie de 79048##.
1317## 9ˢ 4ᵈ. .	Résultat ; qui est la retenue

des 4ᵈ pour livre sur la somme de 79048## ; ainsi des autres.

La raison de ce procédé est qu'en regardant le nombre des livres comme des sols, on rend ce nombre vingt fois plus petit, & qu'en prenant le tiers de ce 20ᵉ, on prend le 60ᵉ du nombre des livres proposé ; ce qui en donne les 4 deniers pour livre.

70. Prélevons encore les 4 deniers pour livre sur la somme 13745## 15ˢ.

13745## 15ˢ . . .	Somme regardée comme des sols.
4581ˢ 8ᵈ . . .	Valeur des 4ᵈ pour livre en sols.
229## 1ˢ 11ᵈ..	Valeur des 4ᵈ pour livre, en livres, sous & deniers.

J'agis sans avoir égard aux 15ˢ ; je prends donc le tiers de 13745##, & j'ai 4581ˢ 8ᵈ, qui donnent 229## 1ˢ 8ᵈ, à quoi j'ajoute 3ᵈ que produisent les 15ˢ, puisqu'une livre produit 4ᵈ ; ainsi les 4ᵈ pour livre de 13745## 15ˢ donnent la somme de 229## 1ˢ 11ᵈ.

Après les détails & les principes qu'on a établis, un plus grand nombre d'exemples seroit superflu ; passons à la division.

que $\frac{36\times20\times6\times3}{9\times20\times6\times3} = \frac{36}{9} = 4$, quotient de 36 divisé par 9 ; ceci est fondé sur cet *axiôme, on n'augmente ni ne diminue un nombre en le multipliant & le divisant par un même nombre quelconque.* Il est clair que $8 \times 5 \div 5 = \frac{40}{5} = 8$; que $\frac{4\times3\times2}{3\times2} = \frac{24}{6} = 4$; c'est-à-dire, que 8 multiplié par 5, donne 40, qui étant divisé par 5, donne le même nombre 8 ; que 4 multiplié successivement par 3 & par 2, donne 24, qui étant divisé par 3 multiplié par 2, ou par le produit 6, donne le même nombre 4, &c. C. Q. F. B. R.

75. Ce principe sert à changer un diviseur complexe en diviseur simple : par exemple, si on propose de diviser 59^{tt} 9^{f} 6^{d} par 4 toises 2 pieds, ce qui renferme cette question, si 4^{t} 2^{pi}, coûtent 59^{tt} 9^{f} 6^{d}, combien coûte une toise ? Pour rendre simple ce diviseur complexe 4^{t} 2^{pi} ; j'observe que 2^{pi} étant le tiers de la toise, il faut multiplier par 3 les deux nombres proposés 59^{tt} 9^{f} 6^{d}, & 4^{t} 2^{pi}, & j'aurai pour dividende 178^{tt} 8^{f} 6^{d}, nombre concret, & pour diviseur 13^{t}, que je regarde comme un nombre abstrait : je suis donc assuré que 13^{t} sont contenues autant de fois dans 178^{tt} 8^{f} 6^{d}, que 4 toises 2 pieds sont contenus dans 59^{tt} 9^{f} 6^{d}, puisque j'ai multiplié ces deux derniers nombres par 3. Il ne s'agit donc que de diviser 178^{tt} 8^{f} 6^{d} par 13^{t} : je les dispose, comme on le voit au haut de la page suivante.

Divid. conc.	$178^{tt}\ 8^{f}\ 6^{d}$	13^{t} diviseur simp. abst.
	. 48	$13^{tt}\ 14^{f}\ 6^{d}$ quotient.
Reste	. 9^{tt}	39
	188	13
	. 58	6 10^{f}
Reste	. 6^{f}	1 6
	78^{d}	1 6
	00	6 . 6^{d}
		$178^{tt}\ 8^{f}\ 6^{d}$ Preuve.

76. Pour faire cette division & toute autre, j'écris 1°. le diviseur 13 à la suite du dividende 178^{tt} $8^{f}\ 6^{d}$, en les séparant par une accolade ; 2°. je fais répondre le premier chiffre 1 du diviseur 13, au premier chiffre 1 du dividende; le second 3 du diviseur, au second 7 du dividende ; je dis : en 17 combien de fois 13 ? Une fois. J'écris 1 au quotient ; je multiplie le diviseur 13 par le quotient 1 ; j'ôte le produit 13 de 17 ; il reste 4, que j'écris sous le 7, & le 8 à la suite ; j'ai pour reste 48, que je regarde comme un dividende : pour trouver le second chiffre du quotient, je dis : le 3 du diviseur répond au 8, & le 1 au 4 ; en 4 combien de fois 1 ? J'observe qu'il ne peut y être contenu que trois fois, quoiqu'il y soit contenu réellement quatre fois, parce que le second chiffre 3 du diviseur n'est pas contenu quatre fois dans le chiffre correspondant 8 du dividende ; j'écris donc 3 au quotient, & je dis : trois fois 3 font 9, qui ôtés de 18, il reste 9, & je retiens une dixaine, que j'ai joint au 8, ou simplement 1 ; trois fois 1 font 3, & 1 de retenu font 4, que j'ôte de 4, il ne reste rien ; j'ai donc pour reste

9ᵗᵗ 8ſ, que je réduis en ſols (43), & j'ai 188ſ que je regarde comme un dividende; je dis: le premier chiffre 1 du diviſeur répond au premier chiffre 1 du dividende, le 3 au 8; en 1 combien de fois 1? une fois: j'écris 1 au rang des dixaines de ſols; & je dis: une fois 3 ôtés de 8, il reſte 5, que j'écris ſous le 8; une fois 1 eſt 1, qui ôté de 1, il ne reſte rien ou zéro; je deſcends le 8 qui eſt au rang des unités, à la ſuite du 5, & j'ai 58, que je regarde comme un dividende; le 3 du diviſeur répond au 8, & le 1 au 5; en 5 combien de fois 1? Je trouve 4, que j'écris au quotient; je dis: quatre fois 3 font 12, qui ôtés de 18, il reſte 6, que j'écris ſous le 8, je retiens 1; quatre fois 1 font 4, & 1 de retenu font 5, qui ôtés de 5, il reſte zéro; je réduis les 6ſ 6ᵈ qui reſtent, en deniers (44), & j'ai 78ᵈ, que je regarde comme un dividende; le 1 du diviſeur répond au 7, le 3 au 8; en 7 combien de fois 1? Je trouve qu'il n'y eſt que ſix fois; j'écris 6ᵈ au quotient, & je dis: ſix fois 3 font 18, qui ôté de 18, il reſte zéro, je retiens 1; ſix fois 1 font 6, & 1 de retenu font 7, que j'ôte de 7, il reſte zéro, & la regle eſt achevée; c'eſt-à-dire que la toiſe coûte 13ᵗᵗ 14ſ 6ᵈ: la preuve en eſt, qu'en multipliant le quotient 13ᵗᵗ 14ſ 6ᵈ par le diviſeur 13, on trouve au produit le dividende 178ᵗᵗ 8ſ 6ᵈ.

Autre preuve: il faut qu'en multipliant le quotient 13ᵗᵗ 14ſ 6ᵈ par 4ᵗ 2ᵖⁱ, on trouve pour produit 59ᵗᵗ 9ſ 6ᵈ; ce qu'on trouve en effet.

L'exemple de diviſion qu'on vient de détailler facilitera l'intelligence de la regle générale qu'on va établir pour faire toutes ſortes de diviſions ſimples ou compoſées.

77. *Regle générale.* 1°. Si les nombres sont complexes, il faut les multiplier par un nombre qui fasse disparoître les parties du diviseur (74 & 75); & écrire le diviseur simple à la suite de son dividende, qui peut être simple ou composé, observant de les séparer par une accolade.

2°. On fait répondre le premier chiffre du diviseur, en commençant par la gauche, au premier chiffre du dividende ou aux deux premiers, si le premier chiffre du dividende est plus petit que le premier du diviseur; & les chiffres suivans du diviseur aux suivans du dividende, chacun à chacun.

3°. Il faut prévoir combien de fois le diviseur est contenu dans les chiffres correspondans du dividende, mettre au quotient le chiffre qui exprime ce nombre de fois; multiplier successivement chaque chiffre du diviseur, commençant par la droite, par le chiffre qu'on a écrit au quotient; ôter chaque produit particulier du chiffre correspondant du dividende, ajoutant à ce chiffre du dividende le nombre suffisant de dixaines pour pouvoir en ôter ce produit particulier & retenir le nombre de dixaines qu'on a ajouté à ce chiffre du dividende; on joindra le nombre de ces dixaines retenues au produit particulier du chiffre qu'on a écrit au quotient, par le chiffre précédent du diviseur, pour ôter le tout du chiffre correspondant du dividende, auquel on ajoutera le nombre de dixaines nécessaires pour pouvoir en soustraire ce produit particulier : on retiendra ce nombre de dixaines considérées comme des unités, pour les joindre de même au produit particulier précédent, & ainsi de suite jusqu'à la fin : on écrira à la suite

du reste le chiffre suivant du dividende, en allant vers la droite, auquel on fera répondre le premier chiffre à droite du diviseur, & les autres chiffres du diviseur aux chiffres correspondans du reste, qu'on regardera comme un dividende: on examinera combien de fois les chiffres du diviseur sont contenus dans leurs correspondans de ce nouveau dividende: on écrira au quotient, à la suite du premier, le chiffre qui exprime ce nombre de fois, & on opérera comme pour le premier chiffre, c'est-à-dire qu'on ôtera chaque produit particulier de ce second chiffre du quotient par chaque chiffre du diviseur, du chiffre correspondant du dividende, auquel on joindra les dixaines nécessaires pour pouvoir faire la soustraction, en observant de retenir autant d'unités qu'on a ajouté de dixaines à ce chiffre du dividende, pour les ajouter au produit particulier précédent: on réitérera la même opération autant de fois qu'on aura à descendre de chiffres du dividende, ce qui donnera autant de chiffres à mettre au quotient; en conséquence, le quotient contiendra autant de chiffres, plus un, qu'il y a de chiffres du dividende à descendre dans chaque division. C. Q. F. B. R.

4°. Pour abréger, on ne considere jamais que le premier chiffre du diviseur, & le premier ou les deux premiers chiffres du dividende (en allant de gauche à droite). On décide du chiffre qu'on doit écrire au quotient, en prévoyant que les unités qui resteront du chiffre ou des deux chiffres du dividende correspondans au premier chiffre à gauche du diviseur, jointes aux chiffres suivans du dividende, puissent contenir les produits particuliers des chiffres suivans du diviseur

qui

qui leur correſpondent par le chiffre qu'on a écrit au quotient. Il faut encore obſerver que le reſte ſoit toujours plus petit que le diviſeur; car ſi ce reſte étoit égal ou plus grand que le diviſeur, il le contiendroit au moins une fois de plus; ainſi le chiffre qu'on auroit mis au quotient, ſeroit trop petit, au moins d'une unité; il faudroit donc l'augmenter. C'eſt proprement dans le choix du chiffre qu'il faut mettre au quotient, que conſiſte toute la difficulté de la diviſion; difficulté que quelques exemples raiſonnés & un peu de pratique auront bientôt applanie.

5°. Lorſqu'on diviſe un nombre quelconque par l'unité ſuivie d'un ou de pluſieurs zéros, on retranche de droite à gauche, autant de chiffres du dividende qu'il y a de zéros dans le diviſeur; les chiffres précédens du dividende ſont le quotient, & les chiffres retranchés repréſentent un reſte, qui doit être réduit en ſous-eſpeces; il faut enſuite diviſer ces ſous-eſpeces de la même maniere, & ſuivre l'opération de ſous-eſpece en ſous-eſpece auſſi loin qu'il ſe pourra. En général, lorſque les derniers chiffres du diviſeur ſont un ou pluſieurs zéros, on retranche autant de chiffres du dividende qu'il y en a dans le diviſeur; & on diviſe les chiffres précédens du dividende par le diviſeur dont on a retranché les derniers zéros; ce qui ſimplifie la regle: on obſerve ſeulement d'écrire à la ſuite du dernier reſte, les chiffres retranchés du dividende, pour les réduire en ſous-eſpeces, & ſuivre de la même maniere l'opération de ſous-eſpece en ſous-eſpece juſqu'à la fin.

Eclairciſſons ces principes par quelques exemples qui feront diſparoître toutes les difficultés

qu'aura pu d'abord préſenter la regle générale qu'on vient d'établir.

78. Prob. Dix-huit grenadiers ſe ſont diſtingués dans une action ; le Général, pour les récompenſer, leur fait diſtribuer 4656₶ 3ſ ; on demande ce qui revient à chacun.

Solution. On voit par l'état de la queſtion que chaque grenadier doit avoir la 18e partie de 4656₶ 3ſ, & conſéquemment qu'il s'agit de diviſer cette ſomme par 18. Le quotient exprimera donc en livres, ſols, &c. la part de chaque grenadier.

Divid.	4656₶ 3ſ	18..	Diviſeur ſimple & abſtrait.
	105	258₶ 13ſ 6d	Quotient : part de chaque grenad.
	156		
Reſte	12₶	18	Mult^{teur} abſtrait.
	243ſ	2064	Prod de 8 unités.
	63	258	d'une dixaine.
Reſte	9	9	Pr. de 10ſ la moitié du multip^{teur}.
	108d		
	00	1 16ſ . .	Prod. de 2ſ, le 10e du multiplicateur.
		18 . .	Prod. de 1ſ, la moitié de celui de 2ſ.
		9	de 6d, la moitié de celui de 1ſ.
		4656₶ 3ſ . .	Preuve.

Procédé. Le premier chiffre 1 du diviſeur répond au premier 4 du dividende ; le ſecond 8 du diviſeur au ſecond 9 du dividende ; je prévois que 1 ne peut être contenu dans 4 que deux fois, je poſe 2 au quotient ; & je multiplie le diviſeur

18 par ce 2, disant : 2 fois 8 font 16, que j'ôte du chiffre correspondant 6, après avoir ajouté une dixaine, il reste zéro, que j'écris sous le 6, & je retiens 1; 2 fois 1 font 2 & un de retenu font 3, que j'ôte de 4, il reste 1, que j'écris sous le 4; j'écris à la suite du reste 10, le 5 du dividende; j'ai 105 que je regarde comme un nouveau dividende; je dis donc : le 8 répond au 5, & le 1 au 10 qui précede; en 10, combien de fois 1? Je prévois qu'il n'y est contenu que 5 fois, que j'écris au quotient à la suite du 2; je multiplie les chiffres du diviseur 18 par 5; disant : 5 fois 8 font 40, que j'ôte du chiffre correspondant 5, ou plutôt de 45, il reste 5, que j'écris au-dessous, & je retiens les 4 dixaines que j'ai ajoutées au 5 pour avoir 45, dont j'ai ôté mon produit particulier 40; 5 fois 1 font 5, & 4 de retenus font 9, que j'ôte de 10, il reste 1, que j'écris sous zéro. J'écris le chiffre 6 du dividende à la suite du reste 15, & j'ai 156, que je regarde comme un nouveau dividende; je dis donc : le 8 répond au 6 & le 1 à 15 : en 15 combien de fois 1? Je prévois qu'il n'y est que 8 fois; je dis donc : 8 fois 8 font 64, que j'ôte de 66, parce que j'ajoute 6 dixaines au chiffre 6 du dividende, il reste 2 que j'écris sous le 6, & je retiens les 6 dixaines ou simplement 6 : 8 fois 1 font 8, & 6 de retenus font 14, que j'ôte de 15, il reste 1 que j'écris sous le 5, & j'ai 12tt de reste, que je réduis en sols (43); j'y joins les 3 sols du dividende, & j'ai 243f, que je divise par 18. En 2 combien de fois 1? Je l'y trouve une fois; j'écris 1 au rang des sols : 1 fois 8 font 8, qui ôtés de 14, il reste 6; je retiens 1 : une fois 1 est 1, & 1 de retenu font 2, qui ôtés de 2, il reste 0;

j'écris le 3 à la suite du reste 6; j'ai 63 pour un nouveau dividende, le 8 répond au 3 & le 1 au 6; en 6 combien de fois 1? je l'y trouve 3 fois; j'écris 3 au rang des unités de sols, & je dis: 3 fois 8 font 24, qui ôtés de 33, il reste 9, je retiens 3; 3 fois 1 font 3, & 3 de retenus font 6, qui ôtés de 6, il reste zéro; je réduis ce reste 9^s en deniers (44), & j'ai 108 deniers, que je divise par 18: le 1 répond au 10 & le 8 au 8; en 10 combien de fois 1? je prévois qu'il y est 6 fois; j'écris 6 au rang des deniers; & je multiplie le diviseur 18 par ce chiffre 6, disant: 6 fois 8 font 48, qui ôtés de 48, il reste zéro; je retiens 4; 6 fois 1 font 6, & 4 de retenus font 10, qui ôtés de 10, il ne reste rien: & la regle est achevée; c'est-à-dire que chaque grenadier aura 258ᵗᵗ 13^s 6^d. C. Q. F. Dét.

79. La preuve de la division se fait en multipliant le quotient par le diviseur: on doit trouver au produit le dividende; c'est une suite de la nature de la division (71). Dans cet exemple, en multipliant la part de chaque grenadier 258ᵗᵗ 13^s 6^d par le nombre de grenadiers 18, on a pour produit la somme de 4656ᵗᵗ 3^s qu'on leur a distribuée.

80. PROB. 208 muids de vin coûtent 22198ᵗᵗ 16^s; à combien revient le muid?

SOLUTION. Il est clair par l'état de la question, que si 208 muids de vin coûtent 22198ᵗᵗ 16^s, un muid coûtera la 208e partie de 22198ᵗᵗ 16^s; il s'agit donc de partager 22198ᵗᵗ 16^s en 208 parties égales, ou de diviser 22198ᵗᵗ 16^s par 208. Je dispose ces nombres comme on voit.

ne reste rien : la regle est achevée ; c'est-à-dire, que le muid de vin coûte 106^{tt} 14^{s} 6^{d} ; c'est la preuve de la multiplication du n°. 45. C. Q. F. Dét.

81. PROB. On a fait faire 867 toises 2 pieds 8 pouces de toise cube de revêtement de fortification, qui coûte au Roi 77788^{tt} 1^{s} 7$^{d}\frac{1}{3}$. On demande le prix de la toise.

SOLUTION. On voit par l'état de la question, qu'il s'agit de diviser 77788^{tt} 1^{s} 7$^{d}\frac{1}{3}$, valeur des 867^{t} 2^{pi} 8^{po}. Par ce nombre de toises, de pieds & de pouces, pour avoir au quotient le prix d'une toise, je les écris comme on voit.

Divid. comp. concret.	77788^{tt} 1^{s} 7$^{d}\frac{1}{3}$	867^{t} 2^{pi} 8^{po}	Diviseur comp. abstrait.
	3	3	Multiplicateur abstrait.
	233364^{tt} 4^{s} 10^{d}	2602^{t} 2^{pi} . .	Nouv. diviseur complexe.
	3	3 . . .	Multiplicateur abstrait.
	700092^{tt} 14^{s} 6^{d}.	7807^{t}. . . .	Diviseur simple abstrait.
	75532	89^{tt} 13^{s} 6^{d} .	Quotient : prix de la toise.
	5269^{tt}		
	105394^{s}		
	27324		
	3903		
	46842^{d}		
	0000		

Procédé. Pour rendre le diviseur simple, je multiplie le dividende & le diviseur par 3, pour faire d'abord disparoître les pouces ; le dividende 77788^{tt} 1^{s} 7$^{d}\frac{1}{3}$ devient 233364^{tt} 4^{s} 10^{d}, & le diviseur 2602^{t} 2^{pi} ; je multiplie ces deux nombres encore par 3, parce que 2 pieds pris trois fois donnent une toise ; j'ai pour dividende 700092^{tt}

14^{f} 6^{d}, & pour diviſeur ſimple 7807^{t}; ce
nombres ſont nonuples des deux nombres p
ſés, ils ſe contiennent donc comme ces de
miers nombres (74); cela poſé, je fais répo
premier chiffre 7 du diviſeur aux deux pr
chiffres 70 du dividende, le 8 au zéro ſuiv
zéro du diviſeur au zéro du dividende qu
cede le 9, & le dernier chiffre 7 du diviſeu
du dividende; & je dis: en 70 combien de
Je prévois qu'il y eſt huit fois, & j'écris
premier chiffre du quotient; huit fois 7 fo
qui ôtés de 59, il reſte 3, que j'écris ſou
huit fois zéro eſt zéro, & 5 de retenus
qui ôtés de 10, il reſte 5, que j'écris ſous
correſpondant; je retiens 1: huit fois 8 fo
& 1 de retenu font 65, qui ôtés de 70, il
que j'écris ſous le zéro auquel le 8 du di
répond, & je retiens 7: huit fois 7 font
7 de retenus font 63, qui ôtés de 70, il r
que j'écris ſous le zéro de 70; j'écris à l
du reſte 7553 le dernier chiffre 2 du divi
& j'ai 75532, que je regarde comme un
dende, auquel je fais répondre les chiffres
viſeur 7807; & je dis: en 75 combien de
Je prévois qu'il y eſt 9 fois, je l'écris au
tient à la ſuite du 8, & je dis: 9 fois 7 fo
qui ôtés de 72, il reſte 9, que j'écris ſous
je retiens les 7 dixaines que j'avois ajoutée
pouvoir ſouſtraire mon produit particuli

ôtés de 75, il reste 5, & j'ai pour reste 5269ᵗᵗ 14ˢ, que je réduis en sols (43) : j'ai 105394ˢ, que je divise par 7807; je dis donc, après avoir fait répondre les chiffres du diviseur 7807 aux 5 premiers chiffres du dividende 105394 : en 10 combien de fois 7? une fois; j'écris 1 au rang des dixaines de sols : une fois 7 ôté de 9, il reste 2, que j'écris sous le 9 : une fois o ôté de 3, il reste 3; une fois 8 ôté de 15, il reste 7, & je retiens 1; une fois 7 & 1 de retenu font 8, qui ôtés de 10, il reste 2 : je descends le dernier chiffre 4; le dernier chiffre 7 du diviseur répond au 4, le zéro au 2, le 8 au 3, & le 7 à 27 : en 27 combien de fois 7? Je l'y trouve 3 fois, j'écris 3 au rang des unités de sols, & je dis : 3 fois 7 font 21, qui ôtés de 24, il reste 3; je retiens 2 : 3 fois zéro est zéro, & 2 de retenus font 2, qui ôtés de 2, il reste zéro : 3 fois 8 font 24, qui ôtés de 33, il reste 9, que j'écris sous le 3; je retiens 3 : 3 fois 7 font 21, & 3 de retenus font 24, qui ôtés de 27, il reste 3 : il reste donc 3903ˢ 6ᵈ, que je réduis en deniers (44) en les multipliant par 12; j'ai 46842ᵈ, que je divise par 7807; je dis donc : en 46 combien de fois 7? Je l'y trouve 6 fois : j'écris donc 6ᵈ au quotient, & je dis : 6 fois 7 font 42, qui ôtés de 42 il ne reste rien, & je retiens 4 : 6 fois zéro & 4 de retenus font 4, qui ôtés du chiffre correspondant 4 du dividende, il reste zéro; 6 fois 8 font 48, qui ôtés de 48, il reste zéro, & je retiens 4 : 6 fois 7 font 42, & 4 de retenus font 46, qui ôtés de 46, à quoi répond le premier chiffre 7 du diviseur, il ne reste rien. La regle est achevée; le prix de la toise cube est donc de 89ᵗᵗ 13ˢ 6ᵈ. Cette division est la preuve de la multiplication du nº 49. C, Q. F. Dét.

Autre exemple. Un Seigneur, pour s'a
d'une dette de 3440# 8f 7d, cede à son
cier du terrein propre à bâtir, à raison
6f 8d la toise quarrée; combien ce c
aura-t-il de toises quarrées de terrein?

SOLUTION. On reconnoît par l'état de
tion, qu'on aura autant de toises, que le
38# 6f 8d est contenu de fois dans 3440#
Il s'agit donc de diviser 3440# 8f 7d par
8d, & le quotient sera de toises quarrées.

Divid. comp. abstrait.	3440# 8f 7d	38# 6f 8d	Divis abs
	3	3	
	10321# 5f 9d	115	Divis
	1121	89tt 4tpi 6tpo	Qu
Reste..	86# 5f 9d		
	6		
	517# 14f 6d		
2e reste..	57# 14f 6d		
	12		
	692# 14f		
3e reste..	2# 14f.		

Procédé. Je commence par rendre le c
simple de complexe qu'il étoit, & cela en
tipliant par 3; ensuite, après avoir m

tenus font 12, que j'ôte de 13, il reste 1, que j'écris sous le 3; je retiens 1 : 8 fois 1 font 8, & 1 de retenu font 9, que j'ôte de 10, il reste 1, que je pose sous le zéro; je descends le dernier chiffre 1, & j'ai 1121, que je regarde comme un dividende. Le 5 répond à 1, le 1 à 2, & le 1 à 11 : en 11 combien de fois 1? Je l'y trouve 9 fois; je pose 9 au quotient, & je dis : 9 fois 5 font 45, que j'ôte de 51, il reste 6, que je pose sous 1; je retiens 5 : 9 fois 1 font 9, & 5 de retenus font 14, que j'ôte de 22, il reste 8, que je pose sous le 2 : 9 fois 1 font 9, & 2 de retenus font 11, que j'ôte de 11, il ne reste rien : le quotient est donc 89 toises quarrées, & il reste 86^{tt} 5^{s} 9^{d}, que je multiplie par 6 pieds, valeur de la toise, c'est-à-dire que je rends le nombre 86^{tt} 5^{s} 9^{d} six fois plus grand, & j'ai 517^{tt} 14^{s} 6^{d}, que je regarde comme un nouveau dividende, que je divise par le même diviseur 115. Ici les unités doivent être 6 fois plus petites que des toises; ce sont donc des pieds. Le premier chiffre 1 du diviseur répond au 5; le second 1 à 1, & le 5 au 7 : en 5 combien de fois 1? Je trouve qu'il y est 4 fois, que j'écris au quotient au rang des pieds : 4 fois 5 font 20, que j'ôte de 27; il reste 7, que j'écris sous le 7, je retiens 2 : 4 fois 1 font 4, & 2 de retenus font 6, que j'ôte de 11, il reste 5, que j'écris sous le 1 : 4 fois 1 font 4, & 1 de retenu font 5, que j'ôte de 5, il ne reste rien : je multiplie le reste 57^{tt} 14^{s} 6^{d} par 12^{po}, ou par le nombre abstrait 12, c'est-à-dire, je le rends 12 fois plus grand, & j'ai 692^{tt} 14^{s}, que je regarde comme un dividende, qui doit donner au quotient des unités 12 fois plus petites que des pieds, savoir des pouces; je dis donc : en 692 combien

de fois 115? Je l'y trouve 6 fois, que je pos
au rang des pouces, & j'ai pour reste 2^{tt} 14^{f},
ou 648^{d}, qu'il faut diviser par 216=3 x 6 x 12
produit successif des nombres 3, 6, 12, qui ont
multiplié le nombre proposé 3440^{tt} 6^{f} 8^{d} & les
restes, & qui ont rendu ce dernier reste 2^{tt} 14^{f}=
648^{d} 216 fois trop grand : je divise donc 648^{d}
par 216, le quotient est 3^{d} sans reste, & la règle
est achevée. Ainsi ce Seigneur, pour s'acquitter
envers son créancier, lui cédera 89^{t} 4^{pi} 6^{po} de
terrein, & lui donnera 3^{d}. La preuve en est, que
si on multiplie 89^{t} 4^{pi} 6^{po} par le prix 38^{tt} 6^{f} 8^{d}
de chaque toise, on aura pour produit 3440^{tt}
8^{f} 4^{d}, à quoi ajoutant les 3^{d} de reste, on aura
la somme de 3440^{tt} 8^{f} 7^{d}, à laquelle la dette
montoit. C. Q. F. Dét.

Autre exemple de Division complexe dans les deux termes.

On sait que 0^{tt} 18^{f} 4^{d} $\frac{13}{24}$ est le prix de 0^{t} 5^{pi}
7^{po}, à combien revient la toise?

SOLUTION. On reconnoît par l'état de la
question, que 0^{tt} 18^{f} 4^{d} $\frac{13}{24}$ sont le produit du
prix de la toise multipliée par 0^{t} 5^{pi} 7^{po}; & on
sait que si on divise le produit de deux nombres
quelconques par un de ces nombres, on a pour
quotient l'autre nombre (71) : conséquemment, si on divise le produit 18^{f} 5^{d} $\frac{13}{24}$ par le
produisant 0^{t} 5^{pi} 7^{po}, on aura pour quotient l'autre produisant, savoir, le prix de la toise ; il s'agit
donc de diviser le nombre complexe concret
18^{f} 4^{d} $\frac{13}{24}$ par le nombre complexe abstrait
0^{t} 5^{pi} 7^{po} ; je les dispose comme on voit.

Divid. concret.	$0^{₶}\ 18^{ſ}\ 4^{d}\ \frac{13}{24}$	$0^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$	Diviseur comp.
		12 . .	Multiplicateur.
	$11^{₶}\ 0^{ſ}\ 6^{d}\ \frac{1}{2}$	$11^{t}\ 1^{pi}$ . . .	Premier prod.
		6 . . .	Multiplicateur.
	$66^{₶}\ 3^{ſ}\ 3^{d}$	67^{t} . . .	Diviseur simple abstrait.
	$1323^{ſ}$	$0^{₶}\ 19^{ſ}\ 9^{d}$	Quotient, valeur de la toise.
	653		
	50		
	603		
	00		

Procédé. Je multiplie les deux termes de la division $0^{₶}\ 18^{ſ}\ 4^{d}\ \frac{13}{24}$ & $0^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$ successivement par 12 & par 6, & j'ai pour dividende $66^{₶}\ 3^{ſ}\ 3^{d}$, & pour diviseur simple 67; comme le diviseur excede le dividende, je pose un zéro au rang des livres; je réduis $66^{₶}\ 3^{ſ}$ en sols, & j'ai $1323^{ſ}$, que je divise par 67; le quotient est $19^{ſ}$, avec un reste $50^{ſ}\ 3^{d}$, que je réduis en deniers; j'ai 603^{d}, que je divise par 67; pour cet effet je dis : le 6 répond à 60 & le 7 à 3 : en 60 combien de fois 6? je l'y trouve 9 fois, que je pose au quotient au rang des deniers; 9 fois 7 font 63, qui ôtés de 63, reste zéro; 9 fois 6 font 54, & 6 de retenus font 60, que j'ôte de 60, il reste zéro; la regle est achevée. Ainsi le prix de la toise est $19^{ſ}\ 9^{d}$; c'est la preuve de la multiplication du n° 60A. C. Q. F. Dét.

82. PROB. Combien aura-t-on d'aunes de velours pour la somme de $560^{₶}\ 10^{ſ}$, à raison de $19^{₶}\ 13^{ſ}\ 4^{d}$ l'aune de 44 pouces.

SOLUTION. On voit par l'état de la questi[on] qu'on aura autant d'aunes & de parties d'a[unes]

que $19^{lt}\ 13^{f}\ 4^{d}$ feront contenus dans $560^{lt}\ 10^{f}$; il s'agit donc de divifer $560^{lt}\ 10^{f}$ par $19^{lt}\ 13^{f}\ 4^{d}$.

Divid. comp. abftrait.	$560^{lt}\ 10^{f}$	$19^{lt}\ 13^{f}\ 4^{d}$ Divif. comp. abftrait.
	3	3
	$1681^{lt}\ 10^{f}$	59^{lt} ... Divifeur fimple abftrait.
	501	28 aunes 22 po .. Quotient.
	$29^{lt}\ 10^{f}$	
	44	Multiplicateur abftrait.
	116	
	116	
	22	
	1298	
	118	
	00	

Procédé. J'obferve qu'en multipliant le divifeur complexe par 3, je le rends fimple; je multiplie auffi le dividende $560^{lt}\ 10^{f}$ par 3, & j'ai pour nouveau dividende $1681^{lt}\ 10^{f}$, & pour divifeur fimple 59; je dis donc: le 5 répond à 16, le 9 au 8; j'examine combien de fois 5 eft contenu dans 16; je trouve qu'il n'y eft que 2 fois, à caufe du fecond chiffre 9 du divifeur, & j'écris 2 au quotient; je multiplie le divifeur 59 par 2, difant: 2 fois 9 font 18, que j'ôte du chiffre correfpondant 8 du dividende, ou plutôt de 18; il refte zéro que j'écris fous le 8, & je retiens la dixaine ajoutée, ou feulement 1: 2 fois 5 font 10, & 1 de retenu font 11, que j'ôte de 16, il refte 5, que j'écris fous le 6; je defcends à la fuite du refte 50 le dernier chiffre 1 du dividende; & je dis: le 9 du divifeur répond à 1, le 5 à 50; en 50 combien de fois 5? je trouve qu'il

n'y est que 8 fois ; je pose 8 au quotient ; & je dis : 8 fois 9 font 72, que j'ôte du chiffre correspondant 1, ou plutôt de 81, il reste 9, & je retiens 8 ; 8 fois 5 font 40, & 8 de retenus font 48, que j'ôte de 50, il reste 2, que j'écris sous le zéro, & j'ai pour reste 29^{tt} 10 sols, que je multiplie par 44 pouces, c'est-à-dire, que je rends le nombre 29^{tt} 10^{f}, 44 fois plus grand, & j'ai 1298, que je regarde comme un nouveau dividende, que je divise par 59. Ici les unités du quotient doivent être 44 fois plus petites que des aunes ; ce sont donc des pouces ; le 5 répond à 12, le 9 au 9 ; en 12 combien de fois 5 ? je trouve qu'il y est 2 fois, & j'écris 2 au rang des pouces ; 2 fois 9 font 18 que j'ôte de 19, il reste 1 que j'écris sous le 9 ; 2 fois 5 font 10, & 1 de retenu font 11, que j'ôte de 12, il reste 1, que j'écris sous le 2 ; je descends le dernier chiffre 8 du dividende ; & je dis : en 11 combien de fois 5 ? 2 fois, & j'écris 2 au quotient ; 2 fois 9 font 18, que j'ôte de 18, il reste zéro, & je retiens 1 ; 2 fois 5 font 10, & un de retenu font 11, que j'ôte de 11, il ne reste rien : la regle est achevée ; on aura donc 28 aunes & 22 pouces de velours pour la somme de 560^{tt} 10^{f}, à raison de 19^{tt} 13^{f} 4^{d} l'aune. C. Q. F. Dét.

83. Lorsque le dividende & le diviseur complexes sont de même espece, & que les unités du quotient sont d'une espece différente, il est bon, pour éviter tout embarras, de réduire les unités à la plus petite espece, & de considérer les unités du nouveau dividende comme étant de l'espece des unités qu'on doit trouver au quotient, & le nouveau diviseur comme un nombre abstrait. Reprenons l'exemple précédent ; je

réduis les deux nombres proposés 560ᵗᵗ 10ˢ & 19ᵗᵗ 13ˢ 4ᵈ en deniers, & j'ai 560ᵗᵗ 10ˢ=134520ᵈ & 19ᵗᵗ 13ˢ 4ᵈ=4720ᵈ; je regarde 134520 comme des aunes, que je dois diviser par le nombre abstrait 4720.

```
Divid. 134520) 4720 .... Diviseur abstrait.
        4012  ( 28 aunes 22 po, ou 28 aun.& demie.
Reste..  236  )  Quotient.
          44
        ----
         944
        944
       -----
       10384    pouces.
         944
          00
```

Procédé. Comme le dernier chiffre du diviseur est zéro, je retranche le dernier chiffre zéro du dividende, & je fais répondre le premier chiffre 4 du diviseur aux deux premiers 13 du dividende, le 7 au 4, & le 2 au 5; je cherche combien de fois 4 est contenu dans 13, je l'y trouve 2 fois: je pose 2 au quotient; je multiplie par ce chiffre 2 le diviseur 472, & j'ôte les produits particuliers des chiffres correspondans du dividende, auxquels on ajoute les dixaines nécessaires, que l'on retient. Je dis donc: 2 fois 2 font 4, que j'ôte de 5, il reste 1, que j'écris sous le 5: 2 fois 7 font 14, que j'ôte de 14, il ne reste rien; je pose un zéro sous le 4, & je retiens 1: 2 fois 4 font 8, & 1 de retenu font 9, que j'ôte de 13, il reste 4; je descends le 2 & j'ai 4012, que je regarde comme un dividende; le 2 répond à 2, le 7 à 1, & le 4 à 40: en 40 combien de fois 4? Je l'y trouv[e] fois; je pose 8 au quotient, & je dis: 8 fo[is]

font 16, que j'ôte de 22, il reste 6, que je pose sous le 2 : 8 fois 7 font 56, & 2 de retenus font 58, que j'ôte de 61, il reste 3 : 8 fois 4 font 32, & 6 de retenus font 38, que j'ôte de 40, il reste 2; le quotient est donc 28 aunes, & il reste 236 aunes, que je réduis en pouces, en les multipliant par 44^{po}, valeur de l'aune; j'ai 10384^{po}, que je divise par 432; le 4 répond à 10, le 7 au 3, & le 2 au 8 : en 10 combien de fois 4? Je l'y trouve 2 fois, que j'écris au quotient au rang des pouces, & je dis : 2 fois 2 font 4, que j'ôte de 8, il reste 4, que j'écris sous le 8 : 2 fois 7 font 14, que j'ôte de 23, il reste 9, que j'écris sous le 3, & je retiens 2 : 2 fois 4 font 8, & 2 de retenus font 10, que j'ôte de 10, il reste zéro. Je descends le dernier chiffre 4; le 2 répond à ce 4, le 7 au 4 qui précede, & le 4 du diviseur au 9 : en 9 combien de fois 4? Je l'y trouve 2 fois; je pose 2 au quotient, & je dis : 2 fois 2 font 4, que j'ôte de 4, il reste zéro : 2 fois 7 font 14, que j'ôte de 14, il reste zéro, & je retiens 1 : 2 fois 4 font 8, & 1 de retenu font 9, que j'ôte de 9, il reste zéro; le quotient est donc 28 aunes 22 pouces, ou 28 aunes & demie, comme on l'a trouvé n°. 82. C. Q. F. Dét.

84. Il y a donc deux méthodes de faire la Division complexe; la premiere est de multiplier le dividende & le diviseur par un nombre qui fasse disparoître les parties du diviseur; la seconde consiste à réduire les termes de la Division à la plus petite espece; elles sont toutes deux exactes & générales : la premiere est plus expéditive; la seconde conduit au même résultat; mais elle est ordinairement moins expéditive, parce que le dividende & le diviseur y deviennent de grands nombres. G

85. Proposons-nous encore, pour den exemple de Division, de distribuer 58^{tt} 12^{f} à 19 particuliers. On voit qu'il s'agit de div le nombre concret 58^{tt} 12^{f} 9^{d} par le nom abstrait 19, & qu'on aura des livres, &c. quotient.

Dividende... 58^{tt} 12^{f} 9^{d} } 19 Diviseur.
01 } 3^{tt} 1^{f} 8^{d}
32^{f}
13
165^{d}
Reste... 13

Procédé. Ayant fait répondre les chiffres d diviseur à ceux du dividende, je dis : en 5 com bien de fois 1 ? Je l'y trouve 3 fois, que j'écri au quotient : 3 fois 9 font 27, que j'ôte de 28, il reste 1, que je pose sous le 8 ; je retiens 2 : 3 fois 1, & 2 de retenus font 5, que j'ôte de 5, il reste zéro ; je réduis 1^{tt} 12^{f} en sols, & j'ai 32^{f}, que je divise par 19 ; je trouve 1^{f} au quo tient, & 13^{f} 9^{d} de reste, que je réduis en de niers, & j'ai 165 deniers, que je divise par 19 ; je trouve 8^{d} au quotient, avec 13^{d} de reste, qui ne peuvent être distribués à 19 particuliers ; c'est pourquoi on les néglige où ce reste est le numé rateur d'une fraction dont le diviseur est le dé nominateur : on l'exprime ainsi, $\frac{13}{19}$, & on pro nonce 13 dix-neuviemes de denier ; le quotient est donc 3^{tt} 1^{f} 8^{d} & $\frac{13}{19}$ de denier ; c'est la part de chaque particulier.

86. Le détail dans lequel on est entré dans la théorie & la pratique des quatre regles d'arith métique ne laisse rien à desirer ; mais il nous

paru néceſſaire pour ne point être arrêté dans la ſuite ; il eſt eſſentiel de ſe rendre ces principes familiers.

C'eſt pour la même raiſon que nous allons faire connoître les quantités poſitives & les négatives, & développer en peu de mots leurs propriétés ; quoique perſonne, ſans en excepter les Savans de nos jours, n'en ait parlé juſqu'ici que dans les traités d'algebre.

87. DÉF. Une quantité ou une grandeur, en général, eſt poſitive ou négative ; elle eſt poſitive priſe dans un ſens ; elle eſt négative priſe dans un ſens oppoſé. Par exemple, étant à Verſailles, je me propoſe d'aller à Paris ; le chemin que je fais de Verſailles vers Paris eſt un chemin poſitif par rapport à mon objet de me rendre à à Paris ; au contraire, ſi avec le deſſein d'aller à Paris, je prends la route de Saint-Cyr, tout le chemin que je ferai ſur cette route ſera un chemin négatif par rapport à mon objet.

La grandeur poſitive, ou n'eſt précédée d'aucun ſigne, ou eſt précédée du ſigne *plus* +; ſi j'ai fait 1000^t de Verſailles vers Paris, mon chemin eſt exprimé par 1000^t ou par + 1000^t; ſi au contraire j'ai fait 1000^t de chemin vers Saint-Cyr, mon chemin eſt négatif, & il ſera précédé du ſigne *moins* —; je l'exprimerai par — 1000 toiſes : il eſt clair que tant que je reſterai à Verſailles, mon chemin ſera nul, je pourrai l'exprimer par 0 ; c'eſt dans ce ſens que 0 tient un milieu entre les grandeurs poſitives & les négatives, ou entre les nombres poſitifs & les négatifs. Rendons ceci ſenſible : Paul n'a rien & ne doit rien, ſon bien eſt 0.

Pierre poſſede 100000 écus ; ſon bien eſt poſitif ou + 100000 écus.

quelconque — 5, le reste est ce nombre conque — 5 moins le nombre 7; on a donc reste — 5 — 7 = — 12. A l'égard du 3ᵉ ple, où l'on se propose d'ôter — 11 de on voit qu'il s'en faut de 11 qu'on veuill quelque chose de — 8, c'est donc + 11 veut ajouter à — 8; le reste est donc + 11 = + 3. En général, il faut chan signe du nombre qu'on veut ôter, & fair addition: dans le 4ᵉ exemple, on dira + 9 ôte — 13 (qui deviennent plus 13), i + 22: dans le 5ᵉ exemple, on dira qui de ôte plus 11 (qui deviennent moins 11), i — 4; de même qui de 2.876345

3.948756

Il reste — 1.072411.

Ce dernier exemple fait voir que lors ôte un grand nombre d'un petit, le res négatif. C. Q. F. B. R.

90. 3°. Lorsqu'il s'agit de multiplier un bre positif par un négatif, ou un négatif p positif, le produit est négatif: +4 × —3 =

—4 × +3 =

La raison en est, que multiplier le no positif + 4 par le nombre négatif — 3, répéter le nombre positif + 4 autant de foi a d'unités dans — 3, mais c'est le répéter a de fois négativement: donc le produit est

positif $-4 \times -3 = +12$: la raison en est que multiplier le nombre négatif -4 par le négatif -3, ce n'est pas prendre ce nombre négatif -4 autant de fois qu'il y a d'unités dans le négatif -3 ; c'est le prendre moins autant de fois. Or prendre -4, moins autant de fois qu'il y a d'unités dans -3, c'est rétablir autant de fois -4 : donc le produit doit être $+4+4+4=+12$. Donc si les termes d'une multiplication sont tous deux positifs, ou tous deux négatifs, le produit est positif ; si au contraire l'un est positif & l'autre négatif, le produit est négatif & doit être précédé du signe moins. C. Q. F. B. R.

91. Dans la division, c'est la même regle ; si le dividende & le diviseur sont tous deux positifs, ou tous deux négatifs, le quotient est positif ; si l'un des deux est négatif & l'autre positif, le quotient est négatif.

$+12 \divideontimes -3 = -4$; car $-3 \times -4 = +12$

$-12 \divideontimes -3 = +4$; car $-3 \times +4 = -12$

(90). D'ailleurs, dans toute division, le quotient multiplié par le diviseur doit produire le dividende ; donc, &c. C. Q. F. B. R.

Nous allons donner ici, en faveur de nos lecteurs qui veulent devenir Mathématiciens, une notion de l'algebre & des quatre regles sur les grandeurs algébriques.

92. DÉF. L'*Algebre* n'est autre chose que le calcul sur les grandeurs en général, exprimées par les lettres de l'Alphabet.

On désigne les quantités connues par les premieres lettres a, b, c, d, f, g, &c. & les inconnues par les dernieres u, x, y, z, &c.

Tout nombre qui précede une grandeur litté-

rale, se nomme *coëfficient.* Il indique combien de fois la grandeur est répétée. Le nombre qui est écrit après une grandeur, un peu au-dessus, est son *exposant.* Il désigne combien de fois la grandeur s'est multipliée successivement, plus un, ou combien de fois cette grandeur est produisant; dans $3a$, le coëfficient 3 indique qu'on prend trois fois la quantité représentée par a; si $a = 10$, $3a = 30$; dans a^3 l'exposant 3 indique que a est multiplié 2 fois successivement, ou que a est trois fois produisant, ou que c'est le cube de a; si $a = 10$, $a^3 = 1000$. Toute grandeur b, qui est sans coëfficient ni exposant, est censée avoir l'unité pour coëfficient & pour exposant: $a = 1a^1$; $b = 1b^1$, &c.

Une grandeur qui n'a qu'un terme est un *monome*, ou une grandeur simple ou incomplexe, comme a, $3ab$, $5c^3d$, &c. Celle qui est composée de deux termes séparés par les signes + ou — est un *binome:* $a+b$, $c-d$; $8a+4d$, $6ab-3cd$, sont des binomes.

Une grandeur qui a plusieurs termes séparés par les signes + ou — est en général un *multinome*, ou un *polynome*, ou une grandeur complexe; $a+b+c$, $4a^2b+2abc-8bcd+4cdn$, &c. sont des grandeurs complexes, des multinomes.

L'avantage de l'Algebre sur le calcul numérique, est qu'on opere sur les grandeurs inconnues comme sur les grandeurs connues, & qu'en suivant l'état d'une question & les rapports que les grandeurs inconnues ont avec les grandeurs connues, on parvient à un résultat qui résout non-seulement la question, mais encore toutes celles de même espece qu'on peut faire sur le même sujet, &c.

93. La regle générale de l'addition eſt, 1°. d'écrire les grandeurs de ſuite avec leurs ſignes ; pour ajouter $+ a$ avec $- b$, on écrit $a - b$; $3 a$ avec $+ 5 b$ & $- 2 c$, on écrit $3 a + 5 b - 2 c$; 2°. ſi les grandeurs ſont de même nom, & qu'elles aient le même ſigne, on ajoute leur coëfficient précédé de leur ſigne. Ainſi $+ 5 a$ & $+ 3 a$ ſont $8 a$; 3°. ſi les ſignes ſont différens, on ôte du plus grand coëfficient le moindre, & on écrit le reſte avec le ſigne du plus grand coëfficient ; il eſt clair que $8 bc - 3 bc = + 5 bc$.

On obſerve les mêmes regles pour l'addition des grandeurs complexes ; on écrit les uns ſous les autres les termes de même nom avec leurs ſignes, comme on voit dans les exemples ſuivans.

1er Ex.	$3a^2b - 5c^2d + 7mn^2 + 8gfr$
	$4a^2b + 7c^2d - 11mn^2 - 5gfu$
Somme	$7a^2b + 2c^2d - 4mn^2 + 8gfr - 5gfu.$

2e Ex.	$5ab - 7cd - 2mn + 4bd$
	$-3ab + 7cd - 5mn - 3bg$
Somme	$2ab$ * $- 7mn + 4bd - 3bg.$

On voit que $3a^2b$ & $4a^2b$ ſont $7a^2b$, que $- 5 c^2 d$ & $+ 7 c^2 d$ ſe réduiſent à $2 c^2 d$, que $+ 7mn^2$ & $- 11 mn^2$ ſont $- 4mn^2$; que $8gfr$ n'étant pas de même nom que $- 5gfu$, il faut les écrire de ſuite avec leurs ſignes.

On voit de même que $+ 5 ab$ & $- 3 ab$, ſont $2 ab$; que $- 7 cd$ & $+ 7 cd$ ſe détruiſent ; que $- 2 mn$ & $- 5 mn$ ſont $- 7 mn$; que les $b d$ n'étant pas les $b g$, il faut les éc avec leurs ſignes ; ainſi des autres.

94. Lorſqu'on voit cette expreſſion a

on doit concevoir que b est ôté de a, & que dans a il y a deux grandeurs, savoir la grandeur b & un reste, qui est positif si a excede b, ou négatif si a est plus petit que b, ou zéro si $a = b$; ce principe entendu, la regle générale de la soustraction est de changer les signes de la grandeur qu'on soustrait, & de faire une addition.

Qui de...	$3a$
ôte...	$a - b$
Il reste...	$2a + b$
Preuve...	$3a$

La raison en est que si de $3a$ on en retranche a, le reste $2a$ est trop petit de b, parce que ce n'étoit point a, mais seulement le reste de a, après en avoir ôté b, qu'on devroit retrancher de $3a$; il faut donc restituer ce b, & écrire plus b : le reste est donc $2a + b$; en effet, si on ajoute $a - b$ avec le reste $2a + b$; on aura la premiere grandeur $3a$.

Qui de...	$3a - 2b + 7c - 2n$
ôte...	$2a - 5b + 2c - 5n$
Il reste...	$a + 3b + 5c + 3n$
Preuve...	$3a - 2b + 7c - 2n$

Autre Exemple.

Qui de...	$7a - 2b + 4c - 3d - 3m$
ôte...	$4a - 2b + 7c - 2d + 7m$
Il reste...	$3a \quad * \quad - 3c - d - 10m$
Preuve...	$7a - 2b + 4c - 3d - 3m$

Procédé. Qui de $3a$ ôte $2a$, il reste a ; mais ôtant ces $2a$, j'ôte trop de $- 5b$, lesquels de-

viennent par conséquent positifs ; ainsi $+ 5b$ $- 2b$ laissent pour reste $+ 3b$; qui de $+ 7c$, ôte $+ 2c$ il reste $+ 5c$; qui de $- 2n$, ôte $- 5n$, qui deviennent positifs, il reste $+ 3n$; le reste est donc $a + 3b + 5c + 3n$.

Procédé du 2e Exemple. Qui de $7a$ ôte $4a$, il reste $3a$; qui $- 2b$ ôte $- 2b$, qui deviennent $+ 2b$, il reste o ; qui de $+ 4c$ ôte $7c$, il reste $- 3c$; qui de $- 3d$ ôte $- 2d$, qui deviennent $+ 2d$, il reste $- d$; qui de $- 3m$ ôte $+ 7m$, qui deviennent $- 7m$, il reste $- 10m$; le reste est donc $3a * - 3c - d - 10m$. La preuve de la soustraction algébrique se fait comme celle des nombres : on ajoute au reste, ou à la différence, la grandeur qu'on a retranchée, & l'on doit avoir pour somme la premiere grandeur.

95. Dans la multiplication algébrique, 1°. les signes égaux donnent plus, les signes inégaux donnent moins (90) ; 2°. les coëfficiens se multiplient, les exposans s'ajoutent ; 3°. si les grandeurs sont différentes, on les écrit de suite. Ainsi $3a \times 4b = + 12ab$; $+ 3a \times - 5b = - 15ab$; $- 2c \times + 4b = - 8bc$; $- 4a \times - 4b = + 16ab$; $2a \times 3a = 6aa = 6a^2$; $4a^2 \times 2a^5 = 8a^7$; $3a^2c \times - 2c^2d = - 6a^2c^3d$.

On fait la multiplication des grandeurs complexes, 1°. en multipliant tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en allant de gauche à droite ; 2°. on observe la regle des signes, celle des coëfficiens & celle des exposans.

Pour rendre plus sensibles les différens produits du quarré d'un binome, nous allons supposer que $a =$ la ligne AB, & $b =$ la ligne BC. Pl. 1, fig. 5.

AB + BC

Exemple $a + b$ Multiplicande.

$a + b$ Multiplicateur.

$aa + ab$

$+ ab + bb$

Pl. I, fig. 5. $aa + 2ab + bb$ produit : quarré du binome $a + b$, représenté par le quarré ACDE.

Autre $a + b$

$a - b$

$aa + ab$

$- ab - bb$

$aa - bb$ Produit.

Procédé. a multiplié par $+ a$ donne $+ aa$; a multiplié par $+ b$ donne $+ ab$; $+ b$ multiplié par $+ a$ donne $+ ab$; $+ b$ multiplié par $+ b$ donne $+ bb$; la somme de ces produits particuliers est $aa + 2ab + bb$; on trouve de même que $(a + b) \times (a - b)$ produit $aa - bb$.

Fig. 2 & 3. Autre Ex. $aa + 2ab + bb$ = ADNP. Multip[ande].

$a + b$ = AB. . . . Multiplicateur.

$a^3 + 2aab + abb$

$+ aab + 2abb + bbb$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ Prod. Cube du binome $a + b$, représenté par le corps ABCDNPOM.

Procédé. aa multiplié par a, donne a^3; $2ab$ multiplié par $+ a$, donne $2aab$; $a \times bb = abb$; aa multiplié par $+ b$, donne $+ aab$; $+ 2ab$, multiplié par $+ b$, donne $+ 2abb$; $+ bb$ multiplié par $+ b$, donne $+ b^3$. La somme de tous

ces produits particuliers est $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, cube du binome $a + b$.

Autre Ex. $3a - 2b + 4d$
$2a + 3b - 5d$

$6aa - 4ab + 8ad$
$+ 9ab - 6bb + 12bd$
$- 15ad + 10bd - 20dd$

Produit. $6aa + 5ab - 7ad - 6bb + 22bd - 20dd$

Procédé. $3a$ multiplié par $2a$, donne $6aa$; $- 2b$ multiplié par $+ 2a$, donne $- 4ab$; $+ 4d$ multiplié par $+ 2a$, donne $+ 8ad$; $+ 3a$ multiplié par $+ 3b$, donne $+ 9ab$; $- 2b$ multiplié par $+ 3b$, donne $- 6bb$; $+ 4d$ multiplié par $+ 3b$, donne $+ 12bd$; $+ 3a$ multiplié par $- 5d$, donne $- 15ad$; $- 2b \times - 5d = + 10bd$; $+ 4d \times - 5d = - 20dd$. La somme de tous ces produits particuliers est $6aa + 5ab - 7ad - 6bb + 22bd - 20dd$; ainsi des autres.

96. La division algébrique incomplexe ne souffre aucune difficulté; les signes égaux donnent plus, les inégaux donnent moins; le coëfficient du diviseur divise celui du dividende; les lettres du diviseur détruisent les mêmes lettres du dividende à dimensions égales; ainsi $+ 12ab * + 3a = 4b$; $5a^2c^3 * 3ac^2 = \frac{5ac}{3}$ ou donne pour quotient $\frac{5ac}{3}$, parce que ac^2 du diviseur détruit ac^2 du dividende $5a^2c^3$, & comme le coëfficient 3 du diviseur n'est pas contenu exactement dans le coëfficient 5 du dividende, ils subsistent au quotient $\frac{5ac}{3}$; de même le quotient

de — 18 ab^2c divisé par + 6 abd eſt, — $\frac{3bc}{d}$: la preuve en eſt qu'en multipliant le diviſeur + 6 abd par le quotient — $\frac{3bc}{d}$. On a pour produit le dividende — 18 ab^2c; on peut auſſi, pour trouver le quotient d'une grandeur incomplexe + 20 a^2bc^2 diviſée par une incomplexe — 5 abc, dire, quelle eſt la grandeur qui, multipliée par le diviſeur — 5 abc, produit 20 a^2bc^2; on trouve que c'eſt — 4 ac; car — 4 ac × — 5 abc + 20 a^2bc^2. Donc = 20 a^2bc^2 diviſés par — 5 abc, donnent pour quotient — 4 ac.

Dans la diviſion complexe, on n'opere que ſur le premier terme du dividende & ſur le premier terme du diviſeur (après les avoir ordonnés, c'eſt-à-dire, diſpoſés de maniere que les mêmes grandeurs ſe trouvent dans ces premiers termes); on obſerve, 1°. la regle des ſignes; 2°. on diviſe le coëfficient du premier terme du dividende, par le coëfficient du premier terme du diviſeur, 3°. les grandeurs du premier terme du diviſeur détruiſent leurs égales dans le premier terme du dividende; 4°. le terme qu'on met au quotient multiplie tous les termes du diviſeur; 5°. on ôte les produits particuliers des termes correſpondans du dividende; 6°. on deſcend à la ſuite du reſte les termes reſtans du dividende, & on regarde le tout comme un nouveau dividende; on diviſe le premier terme du reſte par le premier terme du diviſeur; on a le ſecond terme du quotient, qui multiplie tous les termes du diviſeur; on ôte les produits particuliers des termes de même eſpece du nouveau dividende, & on continue ainſi l'opération juſqu'à la fin.

Exemple.

$$\text{Dividende..}\quad \begin{array}{l|l} 9a^2 - 4b^2 & 3a - 2b \text{ Diviseur.} \\ \hline * \; + 6ab - 4b^2 & 3a + 2b \text{ Quotient.} \\ \quad\;\; * \quad * & \end{array}$$

Procédé. $+9a^2$ divisé par plus $3a$ donne $+3a$ au quotient ; ce quotient $+3a$ multiplié par $+3a$, donne $+9a^2$ que j'ôte de $9a^2$ du dividende, il ne reste rien $*$; plus $3a$ multiplié par $-2b$, donne $-6ab$, qui ôté de $-4b^2$, il reste $+6ab-4b^2$ pour nouveau dividende ; $+6ab$ divisé par $+3a$, donne $+2b$ au quotient ; ce terme du quotient $+2b$ multiplié par $+3a$, donne plus $6ab$ que j'ôte de $6ab$, & il ne reste rien ; $+2b$ multiplié par $-2b$, donne $-4bb$, qui ôté de $-4b^2$, il ne reste rien ; la division est achevée. Ainsi en divisant $9aa-4bb$ par $3a-2b$, le quotient est $3a+2b$; cet exemple fournit ce principe, qu'en divisant la différence de deux quarrés par la différence de leurs racines, on a la somme de leurs racines, & réciproquement.

Autre exemple.

$$\text{Divid.}\quad \begin{array}{l|l} a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 & a - b \quad \text{Diviseur.} \\ \hline * - 2a^2b + 3ab^2 - b^3 & a^2 - 2ab + b^2 \text{ Quot.} \\ \quad * \; + ab^2 - b^3 & \\ \qquad\quad * \quad * & \end{array}$$

Procédé. a^3 divisé par a donne a^2 au quotient ; a^2 multiplié par a donne a^3, qui ôté de a^3, il ne reste rien ; $-b$ multiplié par a^2, donne $-a^2b$, qui ôté de $-3a^2b$, il reste $-2a^2b$: j'écris à la suite $+3ab^2-b^3$; $-2a^2b$ divisé par $+a$, donne $-2ab$ au quotient ; $+a$ multiplié par

$-2ab$, donnent $-2a^2b$, qui ôtés de $-2a^2b$, il ne reste rien ; $-b$ multiplié par $-2ab$, donne $+2ab^2$, qui ôté de $+3ab^2$, il reste $+ab^2$: j'écris à la suite $-b^3$, & j'ai pour nouveau dividende ab^2-b^3 ; ab^2 divisé par a, donne $+b^2$ au quotient ; $+a\times+b^2$ donne $+ab^2$, qui ôté de $+ab^2$, il ne reste rien ; $-b$ multiplié par $+b^2$, donne $-b^3$, qui ôté de $-b^3$, il ne reste rien ; la division est achevée. Ainsi $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ divisé par $a-b$, donne pour quotient $a^2-2ab+b^2$; ainsi des autres. Revenons à l'Arithmétique.

Axiomes, ou Principes dont on fait usage dans toutes les parties des Mathématiques.

97. Si on multiplie ou divise, un nombre ou une grandeur d'une part, & toutes ses parties de l'autre, par un même nombre ou une même grandeur, les produits ou les quotiens sont égaux.

98. Si deux ou plusieurs grandeurs sont égales chacune à une même grandeur, elles sont égales entr'elles.

99. Si de deux grandeurs égales on ôte une même grandeur ou des grandeurs égales ; les restes sont égaux ; si on en ôte d'inégales, les restes sont inégaux, & celle dont on ôte le plus, demeure la moindre.

100. Si à deux, ou à plusieurs grandeurs égales entr'elles, on ajoute une même grandeur ou des grandeurs égales, les sommes seront égales ; si on leur ajoute des grandeurs inégales, les résultats seront inégaux, & celle à laquelle on a ajouté le plus, sera la plus grande.

101. Si deux grandeurs sont inégales, & qu'on leur

leur ajoute à chacune une même grandeur, les résultats sont inégaux, & le plus grand résultat est celui qui renferme la plus grande des deux grandeurs proposées ; si on en ôte une même grandeur, le reste de la plus grande sera le plus grand.

102. Si deux grandeurs sont inégales, leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts le seront aussi ; & la moitié, le tiers, le quart, &c. de la plus grande, sera plus grand que la moitié, le tiers, le quart, &c. de la plus petite ; il en est de même de leurs doubles, de leurs triples, de leurs quadruples, &c.

103. Si on multiplie ou divise deux grandeurs égales par une même grandeur, les produits ou les quotiens seront égaux. Ainsi deux grandeurs étant égales, leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, &c. le seront aussi : il en est de même de leurs doubles, de leurs triples, & en général de leurs parties correspondantes quelconques. Il est de même évident que si on multiplie des grandeurs égales par des grandeurs égales, les résultats sont égaux.

Si une grandeur est double, triple, quadruple, &c. d'une autre grandeur, la moitié, le tiers, le quart, &c. de la premiere grandeur sera double, triple, &c. de la moitié, du tiers, du quart, &c. de la seconde grandeur : 48 est quadruple de 12 ; on voit que 24, moitié de ce premier nombre 48, est quadruple de 6, moitié du second nombre 12, &c. : il n'est pas moins évident que le double, le triple, le quadruple, &c. de la premiere grandeur sera double, triple, quadruple, &c. du double, du triple, du quadruple de la seconde grandeur.

104. Si on a deux ſuites de grandeurs ; dont chacune de la premiere ſuite, ſoit double, triple, quadruple, &c. de ſa correſpondante dans la ſeconde ſuite ; il eſt évident que la ſomme des grandeurs de la premiere ſuite ſera double, triple, quadruple, &c. de la ſomme de celles de la ſeconde ſuite.

Soit la premiere ſuite . . 12, 15, 27, 33, &c.
La ſeconde ſuite . . . . . . 4, 5, 9, 11, &c.

On voit que $12 + 15 + 27 + 33 = 87$, ſomme des nombres de la premiere ſuite, eſt triple de celle des nombres de la ſeconde ſuite $4 + 5 + 9 + 11 = 29$, ainſi des autres.

105. L'unité ne multiplie ni ne diviſe ; $12 \times 1 = 12$; $\frac{12}{1} = 12$; 12 multiplié par 1, produit 12 ; 12 diviſé par 1, donne 12 pour quotient : donc, &c.

106. Si on multiplie ou diviſe deux grandeurs inégales par une même grandeur, ou par des grandeurs égales, les réſultats ſont inégaux, & le plus grand répond à la plus grande de ces deux grandeurs inégales.

107. 1°. A la place d'une grandeur, on peut mettre ſon égale, ou toutes ſes parties ; 2°. ce qui renferme eſt plus grand que ce qui eſt renfermé ; 3°. ſi on a deux grandeurs inégales d'une part, & deux autres grandeurs inégales d'une autre part, & qu'on ajoute l'une à l'autre les deux plus grandes, leur ſomme ſera plus grande que celle des deux petites jointes enſemble.

108. 1°. Deux grandeurs ſont égales lorſqu'étant appliquées l'une ſur l'autre, elles conviennent en tout ſens ; 2°. deux grandeurs ſont égales, lorſqu'on ne peut augmenter ni diminuer

l'une sans la rendre plus grande, ou plus petite que l'autre; 3°. elles sont encore égales, si après leur avoir ajouté, ou en avoir ôté une même grandeur, les résultats sont égaux à une même grandeur.

109. Si de trois grandeurs exprimées par *a*, *b*, *c*, la premiere *a* est plus grande que la seconde *b*, & la seconde *b* plus grande que la troisieme *c*; on en peut conclure que la premiere *a* est beaucoup plus grande que la troisieme *c*, puisqu'elle est plus grande, qu'une plus grande que *c*.

110. 1°. Il est impossible qu'une grandeur soit & ne soit pas en même tems égale à une autre grandeur; 2°. une grandeur moins elle-même, ou moins sa valeur, égale zéro.

111. Les causes sont proportionnelles à leurs effets, c'est-à-dire, qu'une cause double, triple, quadruple, &c. d'une autre cause, produit un effet double, triple, quadruple, &c. de celui que produit cette autre cause. Pour rendre sensible cet axiôme, il est bon d'observer qu'on appelle *cause* en général tout ce qui produit quelqu'effet. Un particulier achete 4 aunes de velours, qu'il paye 100#; il est clair que ces 4 aunes de velours sont la cause du déboursé 100#, qui est l'effet; il n'est pas moins évident que si ce particulier avoit acheté le double de velours, c'est-à-dire, 8 aunes, il auroit débourse 200#, ou le double de ce qu'il a dépensé.

Ces principes sont de la plus grande utilité dans toutes les parties des mathématiques; on ne peut se les rendre trop familiers; c'est par leur secours qu'on est parvenu à faire les découvertes les plus intéressantes.

112. On a défini dans les notions préliminaires ce qu'on entendoit par équation : ajoutons ici, 1°. que si on ajoute à chaque membre d'une équation une même quantité, l'équation subsiste; si on a cette équation $12+3=20-5$ & qu'on ajoute de part & d'autre 5, on aura $12+3+5=20-5+5$, ou $12+3+5=20$, parce que (110) $-5+5=0$.

2°. Si de chaque membre d'une équation on ôte une même grandeur, les restes sont égaux, & l'équation subsiste; si on a $14+3=9+8$, & qu'on ôte 3 de part & d'autre, on aura $14+3-3=9+8-3$, ou $14=9+8-3$, parce que $+3-3=0$ (110); on appelle cela corriger l'expression, ce qui rend l'équation plus simple.

113. On déduit de ce qui précede, ce principe: pour faire passer un terme d'un des membres d'une équation dans l'autre, il faut l'écrire dans cet autre membre avec un signe contraire, & l'équation subsistera; si dans l'équation $20-5=12+3$, je fais passer -5 dans le second membre, & $+3$ dans le premier, on aura $20-3=12+5$; de même, si dans l'équation $19+2=21$ on fait passer $+2$ dans le second membre, on aura $19=21-2$. De même l'équation $9-3=4+2$, devient, en transposant, $9-2=4+3$, ou $9-4=3+2$.

Quand on fait passer un terme d'un des membres de l'équation dans l'autre, cela s'appelle *transposer*. C'est à l'aide de cette transposition de termes qu'on parvient à dégager une quantité inconnue. Par exemple, on sait qu'un nombre inconnu, exprimé par x, plus 7, est égal à 20 plus 3, ou l'on a cette équation, $x+7=20+3$;

transposant 7, on aura le nombre cherché $x = 20 + 3 - 7 = 16$; de même, si on cherche un nombre inconnu x, qui ôté de 20 donne 8, on le trouvera en formant, d'après l'état de la question, cette équation : $20 - x = 8$; transposant x & 8, on aura $x = 20 - 8 = 12$. C. Q. F. Dét. & B. R.

114. Si on multiplie ou divise les termes d'une équation par une même grandeur ou par des grandeurs égales, les produits ou les quotiens forment une équation. Si on a $\frac{3x}{4} = 36$, en multipliant par 4, on aura $3x = 144$, & divisant par 3, on aura $x = \frac{144}{3} = 48$; ce qui est évident (103). On appelle cela *dégager l'inconnue*.

115. 1°. Si à la place d'un terme d'une équation, on substitue sa valeur, l'équation subsiste; si dans l'équation $8 + 6 = 12 + 2$, à la place de 12 on met $9 + 3$, on aura $8 + 6 = 9 + 3 + 2$, ce qui est évident (107); 2°. si on éleve les deux membres d'une équation au quarré, au cube ou à une même puissance quelconque, l'équation subsistera; car c'est multiplier successivement une ou plusieurs fois des grandeurs égales par elles-mêmes; d'où il suit encore, 3°. que si on tire la même racine de chaque membre d'une équation, les racines seront en équation; car deux quantités égales ont nécessairement la même racine.

Ces principes sur les équations suffisent pour l'intelligence de l'Arithmétique & de la Géométrie : on en traitera plus amplement dans l'Algebre.

*

DES FRACTIONS.

116. RAPPELLONS ici ce que nous avons dit (3 & 6), qu'une fraction représente une ou plusieurs parties égales d'un entier, & ajoutons qu'une fraction est un nombre divisé par un plus grand; $\frac{3}{4}$ d'écu indique qu'on a 3 fois le quart d'un écu; or 3 fois le quart d'un écu, est la même chose que le quart de 3 écus, ou c'est 3 écus divisés par 4; de même $\frac{4}{7}$ de toise représentent 4 fois la 7e partie d'une toise; ou, ce qui est la même chose, 4 toises divisées par le nombre abstrait 7: on peut dire aussi qu'une fraction est un rapport géométrique, dont le numérateur est l'antécédent, & le dénominateur le conséquent (9).

117. D'où il suit que lorsque le numérateur est égal au dénominateur, la fraction vaut un entier, on voit que $\frac{3}{3}=1$; $\frac{4}{4}=1$; $\frac{6}{6}=1$; $\frac{11}{11}=1$; $\frac{1000}{1000}=1$, &c.

2°. Que lorsque le numérateur excede le dénominateur, la fraction vaut plus d'un entier, & que pour savoir combien elle en vaut, il faut diviser le numérateur par le dénominateur; ainsi $\frac{17}{4}=4+\frac{1}{4}$; car dans cet exemple l'entier a 4 parties, & on en a 17; on a donc 4 entiers & $\frac{1}{4}$, &c.

3°. Que pour réduire un nombre en fraction, il n'y a qu'à multiplier ce nombre par le dénominateur proposé; ajouter le numérateur s'il y en a un, au produit; & écrire dessous le dénominateur donné. Ainsi 5 aunes $\frac{2}{7}=\frac{37}{7}$; de même, 9 toises $\frac{1}{8}=\frac{73}{8}$ de toise; ce qui est évident par l'article précédent.

4°. Que pour trouver la valeur d'une fraction, il n'y a qu'à multiplier le numérateur par les parties de l'entier dont on parle, & diviſer le produit par le dénominateur; le quotient donnera les parties que l'on cherche, ou la valeur de la fraction; car le numérateur peut être conſidéré (116) comme des entiers qu'il faut diviſer par le dénominateur conſidéré comme un nombre abſtrait ou abſolu; or diviſer un nombre ou toutes ſes parties, c'eſt la même choſe: donc, &c. Ainſi $\frac{2}{5}$ d'écu $= \frac{120^f}{5} = 24^f$; de même $\frac{7}{12}$ de toiſe $= \frac{42^{pi}}{12} = 3^{pi}\ 6^{po}$. Par la même raiſon $\frac{3}{7}$ de livre $= \frac{60}{7} = 8^f\ 6^d$ & $\frac{6}{7}$ de denier, &c.

118. *Principe.* Si on multiplie ou diviſe les termes d'une fraction par un même nombre, on ne change rien à la valeur de la fraction; il eſt clair, 1°. que ſi le numérateur eſt la moitié, le tiers, le quart, &c. du dénominateur, le double, le triple, &c. de ce numérateur ſera la moitié, le tiers, le quart, &c. du double, du triple, &c. du dénominateur; 2°. que la moitié, le tiers, le quart, &c. du numérateur ſera la même partie de la moitié, du tiers, du quart, &c. du dénominateur; il eſt évident, 1°. que $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$; on voit que 10 eſt les deux tiers de 15, comme 2 eſt les deux tiers de 3; 2°. que $\frac{48}{72} = \frac{48 * 6}{72 * 6} = \frac{8}{12} = \frac{8 * 4}{12 * 4} = \frac{2}{3}$; on voit encore que 2 eſt les 2 tiers de 3, comme 48 eſt les deux tiers de 72, comme 8 eſt les deux tiers de 12; ainſi des autres. C. Q. F. B. R.

119. *Principe.* 1°. Si on multiplie le numérateur d'une fraction par un nombre quelconque, ou qu'on diviſe ſon dénominateur par ce même

nombre, la nouvelle fraction, qui en résulte, contiendra autant de fois la premiere que ce nombre contient d'unités : on voit que si on multiplie par 3 le numérateur de la fraction $\frac{6}{21}$, on aura $\frac{18}{21}$, qui valent 3 fois $\frac{6}{21}$; de même, si on divise par 3 le dénominateur de la fraction $\frac{6}{21}$, on aura $\frac{6}{7}$, qui valent 3 fois $\frac{6}{21}$; car la 7e partie d'un tout vaut 3 fois la 21e partie de ce même tout; $\frac{1}{7} = \frac{3}{21}$ (118); donc $\frac{6}{7}$ est triple de $\frac{6}{21}$: donc, &c. Donc pour multiplier une fraction par un nombre entier, il n'y a qu'à multiplier le numérateur par ce nombre, & donner au produit le même dénominateur ; ainsi $\frac{5}{29} \times 4 = \frac{20}{29}$; $\frac{3}{40} \times 7 = \frac{21}{40}$, &c. On multiplie aussi une fraction par un nombre entier, en divisant le dénominateur par ce nombre, lorsque cette division se fait sans reste ; si on multiplie $\frac{7}{40}$ par 5, on pourra diviser 40 par 5, on aura pour produit $\frac{7}{8} = \frac{7}{40} \times 5 = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$ (118). Donc, &c. C. Q. F. B. R.

2°. Si on divise le numérateur par un nombre entier, lorsque la division peut se faire exactement, ou qu'on multiplie le dénominateur par ce nombre, on aura une nouvelle fraction, qui sera contenue dans la premiere autant de fois que ce nombre contient d'unités : on voit que si on divise par 4 le numérateur de la fraction $\frac{8}{12}$, on aura $\frac{2}{12}$, qui est une fraction contenue visiblement 4 fois dans $\frac{8}{12}$; de même, si on multiplie par 4 le dénominateur de la fraction $\frac{8}{12}$, on aura $\frac{8}{48}$, qui n'est aussi que le quart de $\frac{8}{12}$; car le 12e d'un tout vaut 4 fois la 48e partie de ce tout; $\frac{1}{12} = \frac{4}{48}$ (118); donc $\frac{8}{12}$ valent 4 fois $\frac{8}{48}$; donc en général, pour diviser une fraction par un nombre entier, il n'y a qu'à multiplier le dénominateur de la fraction proposée par ce nombre;

ainsi $\frac{3}{4}$, divisé par 5, donne pour quotient $\frac{3}{20}$; de même, $\frac{7}{9} * 8 = \frac{7}{72}$; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

120. *Principe*. Si on multiplie ou divise successivement un nombre, par deux ou plusieurs nombres, ou par le produit de ces nombres, on aura le même résultat.

1°. Il est clair que $4 \times 3 \times 2 = 24$; de même, $4 \times 6 = 24$; mais 6 est le produit des nombres 2 & 3 qui multiplient successivement le nombre 4; donc, &c.; 2°. on voit de même que $48 * 2 = 24$ & $24 * 3 = 8$, quotient de 48 divisé successivement par 2 & par 3; de même $48 * 6 = 8$; donc, &c. C. Q. F. B. R.

121. Déf. Deux nombres sont dits premiers entr'eux, lorsqu'ils n'ont pour commun diviseur que l'unité; & toute fraction, dont les termes sont premiers entr'eux, est dite réduite à ses *moindres termes* ou à sa plus simple expression; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{9}{13}$; $\frac{5}{11}$, &c. sont des fractions réduites à leurs moindres termes; il est bon de réduire toujours les fractions à leurs moindres termes: leurs expressions sont plus simples & plus intelligibles: la fraction $\frac{21}{28}$ se réduit à $\frac{3}{4}$, si on en divise les deux termes par 7; or, trois quarts d'un entier est une expression plus simple & plus intelligible que vingt & un vingt-huitieme de cet entier. On reconnoît d'abord que $\frac{3}{4}$ d'une livre sont 15 sols, & on n'apperçoit pas aussi facilement que $\frac{21}{28}$ d'une livre sont aussi 15 sols, &c.

122. Prob. Réduire une fraction à ses moindres termes, ou trouver le plus grand nombre qui divise exactement les deux termes d'une fraction.

Il est clair qu'en divisant les deux termes d'une

fraction par le plus grand diviseur commun, la fraction se réduira à ses moindres termes ; il ne s'agit donc que de trouver le plus grand diviseur commun des deux nombres donnés.

Regle générale. Il faut, 1°. diviser le dénominateur par le numérateur ; si la division se fait exactement, le numérateur est le diviseur cherché ; 2°. s'il y a un reste, il faut diviser le numérateur par ce premier reste ; si la division est exacte, ce premier reste est le diviseur demandé ; 3°. en général, il faut diviser le premier reste par le second, le second par le troisieme, le troisieme par le quatrieme, ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on en trouve un qui divise exactement le précédent ; ce dernier diviseur sera le plus grand commun diviseur des termes de la fraction proposée : si ce dernier diviseur est l'unité, les termes de la fraction proposée sont premiers entr'eux ; elle ne peut donc alors se réduire à une plus simple expression.

Exemple. Soit proposé de réduire la fraction $\frac{168}{240}$, à ses moindres termes.

Je divise le dénominateur 240 par le numérateur 168, il reste 72 ; je divise le numérateur 168 par ce premier reste 72, il reste 24 ; je divise ce premier reste 72 par ce second reste 24 ; la division est exacte : d'où je conclus que 24 est le plus grand commun diviseur des termes de la fraction $\frac{168}{240}$, ou des nombres proposés 168 & 240, & la fraction $\frac{168}{240}$ est réduite à $\frac{7}{10}$.

DÉM. Il est clair, 1°. que 24 est le plus grand nombre qui puisse se diviser lui-même ; il divise exactement 72 ; il divisera donc 168, qui n'est autre chose que 2 fois $72 + 24$; conséquemment il divisera $240 = 168 + 72$; donc enfin

24 eſt le plus grand commun diviſeur des deux termes de la fraction $\frac{168}{240}$, qui ſe réduit à $\frac{7}{10}$; ou des deux nombres 168 & 240; donc la regle générale eſt exacte. C. Q. F. Dét.

AUTRE DÉM. Soit la même fraction $\frac{168}{240}$ à réduire à ſes moindres termes.

1°. On a $240 * 168 = 1$ avec un reſte 72, d'où (71) $168 \times 1 + 72 = 240$, *1re équation.*

2°. $168 * 72 = 2$ avec un reſte 24, d'où $72 \times 2 + 24 = 168$, *2e équation.*

3°. $72 * 24 = 3$ ſans reſte, d'où $24 \times 3 = 72$, *3e équation.*

Si on ſubſtitue dans la ſeconde équation, à la place de 72, ſa valeur 24×3, on aura $24 \times 3 \times 2 + 24 = 168$, &, ſi dans la premiere équation on ſubſtitue la valeur de 168 & celle de 72, on aura $24 \times 3 \times 2 + 24 + 24 \times 3 = 240$.

On a donc enfin ces deux nouvelles équations:

$$\left.\begin{array}{l} 240 = 24 \times 3 \times 2 + 24 + 24 \times 3. \\ 168 = 24 \times 3 \times 2 + 24. \end{array}\right\} \text{dans leſquelles}$$

on voit que les valeurs de 240 & de 168 ſont diviſibles par 24, qui en eſt en même tems le plus grand diviſeur poſſible. Cette démonſtration eſt générale. Si on diviſe 240 & 168 par 24, on aura $\frac{168}{240} = \frac{7}{10}$, comme ci-deſſus. C. Q. F. Dét.

123. On réduit auſſi une fraction à ſes moindres termes, en prenant ſucceſſivement la moitié de chaque terme, enſuite le tiers, le 5e, le 7e, le 11e, &c. on trouve que $\frac{168}{240} = \frac{84}{120} = \frac{42}{60} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$, comme ci-deſſus; de même, $\frac{42}{90}$, ſe réduit à $\frac{7}{15}$; car $\frac{42 * 2}{90 * 2} = \frac{21}{45}$, & $\frac{21 * 3}{45 * 3} = \frac{7}{15}$, &c.

Pour rendre cette méthode plus facile, on ajoutera, 1°. que tout nombre qui ſe termine par un chiffre pair, ſe diviſe par 2; qu'un nombre, dont la ſomme des chiffres eſt diviſible par

3 ou par 9, se divise par 3 ou par 9; 3°. qu'un nombre qui se termine par un 5, se divise par 5; que tout nombre qui finit par 0, se divise par 10 & par 5 exactement.

124. DÉF. On dit que des fractions sont réduites à une même dénomination, lorsque sans en changer la valeur, on leur a donné le même dénominateur. Ainsi les fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ étant changées en celles-ci $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, dont les valeurs sont les mêmes, on dira que ces deux fractions sont réduites à la même dénomination.

125. PROB. Réduire deux ou plusieurs fractions à une même dénomination.

Regle générale. Il faut 1°. multiplier successivement tous les dénominateurs ensemble; le résultat est le dénominateur commun; 2°. multiplier chaque numérateur par les dénominateurs de toutes les autres fractions; chaque produit est le numérateur d'une nouvelle fraction égale à sa correspondante. Soient les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ à réduire à la même dénomination. Je multiplie l'un par l'autre les dénominateurs 2, 4 & 6; leur produit $2 \times 4 \times 6 = 48$ est le dénominateur commun. Je l'écris sous un trait horisontal; je multiplie le numérateur 1 de la premiere fraction $\frac{1}{2}$ successivement par les dénominateurs 4 & 6 des autres fractions, le produit 24 est le numérateur de la fraction $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$; je multiplie 3, numérateur de la seconde fraction $\frac{3}{4}$, par les dénominateurs 2 & 6 des deux autres fractions, le produit 36 est le numérateur de la fraction $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$. Je multiplie enfin le numérateur 5 de la fraction $\frac{5}{6}$ par les dénominateurs 2 & 4 des deux autres fractions, le produit 40 est le numérateur de la fraction $\frac{40}{48} = \frac{5}{6}$; les 3 fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ sont donc changées

en celles-ci $\frac{24}{48}$, $\frac{36}{48}$, $\frac{40}{48}$, qui leur ſont égales, & qui ont le même dénominateur 48.

DÉM. On a multiplié le numérateur & le dénominateur de chaque fraction par les mêmes nombres ; ſavoir, les termes de la fraction $\frac{1}{2}$ par 4 & par 6 ; ceux de la fraction $\frac{3}{4}$ par 2 & par 6, & les termes de la fraction $\frac{5}{6}$ par 2 & par 4 ; donc (118) les produits donnent des fractions de même valeur. C. Q. F. D.

Pour réduire les fractions à la même dénomination, on les diſpoſe comme on voit ci-deſſous.

1er Ex. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$
24, 36, 40
48.

2e Ex. $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{9}$
189, 90, 140
315.

126. REMARQUE. Il n'eſt pas toujours néceſſaire de multiplier ſucceſſivement tous les dénominateurs enſemble, pour avoir le dénominateur commun ; il ſuffit de prendre un nombre qui contienne exactement chacun des dénominateurs des fractions propoſées. Comme dans le premier exemple, 12 contient exactement les dénominateurs 2, 4 & 6 ; alors ce nombre 12 peut être pris pour dénominateur commun. Dans ce cas, il faut diviſer ce nombre 12 par chaque dénominateur, & multiplier chaque quotient par ſon numérateur ; le produit eſt le numérateur d'une nouvelle fraction égale à ſa correſpondante. D'après ce principe, les trois fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ deviennent $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, qui ſe préſentent ſous des expreſſions plus ſimples : on voit encore qu'on n'a fait que multiplier les deux termes de chaque fraction par un même nombre,

ceux de $\frac{1}{2}$ par 6, ceux de $\frac{3}{4}$ par 3, & ceux de $\frac{5}{6}$ par 2 : donc (118), &c. C. Q. F. B. R.

Addition des Fractions.

127. *Regle générale.* 1°. Si les fractions proposées sont réduites à la même dénomination, il faut faire une somme des numérateurs, & écrire dessous le dénominateur commun; il est clair que $\frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12}$ ou $\frac{2}{3}$ (122).

2°. Si les fractions n'ont pas la même dénomination, il faut les y réduire (125), & faire comme ci-dessus; ainsi $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20} = 1 + \frac{3}{20}$ (117); ainsi des autres.

D'où il suit, que pour ajouter des nombres composés d'entiers & de fractions, avec d'autres nombres composés d'entiers & de fractions; il faut joindre à la somme des entiers celle des fractions, ce qui donnera la somme totale; ainsi 3 toises $\frac{3}{5}$, ajoutées avec 4 toises $\frac{6}{7}$, donnent 7 toises $\frac{51}{35}$, ou 8ᵗ $\frac{16}{35}$; ainsi des autres.

Soustraction des Fractions.

128. *Regle générale.* Il faut, 1°. que les fractions aient la même dénomination, ou les y réduire (125); 2°. ôter le numérateur de la fraction qu'on veut soustraire, du numérateur de la fraction dont on veut l'ôter, & écrire sous le reste le dénominateur commun; il est clair, 1°. que $\frac{7}{11} - \frac{4}{11} = \frac{3}{11}$; 2°. Si on se propose d'ôter $\frac{3}{5}$ de $\frac{6}{7}$, on les réduira à la même dénomination (125), & on aura $\frac{6}{7} - \frac{3}{5} = \frac{30-21}{35} = \frac{9}{35}$; il est clair que $\frac{30}{35}$ moins $\frac{21}{35}$ égalent $\frac{9}{35}$; ainsi des autres. C. Q. F. Dét.

129. D'où il suit, que pour ôter un nombre composé d'entiers & de fractions d'un nombre entier ou d'un nombre composé d'entiers & de fractions, il n'y aura qu'à soustraire la fraction de la fraction, & le nombre entier du nombre entier; ou bien on réduira en fraction les entiers & les fractions (117), & on leur donnera le même dénominateur (125); & on opérera comme ci-dessus.

Qui de $2^t \frac{1}{2}$ ôte $1^t \frac{3}{4}$, il reste $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; car $2^t \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ & $1^t \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$, & $\frac{5}{2} - \frac{7}{4}$, $= \frac{20-14}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ de toise; de même, pour ôter $3^{tt} \frac{4}{7}$ de $8^{tt} \frac{8}{9}$, je réduis ces nombres en fractions, & j'ai (117) $8^{tt} \frac{8}{9} = \frac{80}{9}$ & $3^{tt} \frac{4}{7} = \frac{25}{7}$; & en leur donnant le même dénominateur (125), j'ai $\frac{80}{9} = \frac{560}{63}$ & $\frac{25}{7}$, $= \frac{225}{63}$ que je soustrais de $\frac{560}{63}$, il reste $\frac{335}{65} = 5^{tt} \frac{20}{63}$ de livre; ainsi qui de $8^{tt} \frac{8}{9}$ ôte $3^{tt} \frac{4}{7}$, il reste $5^{tt} \frac{20}{63}$; ainsi des autres.

Multiplication des Fractions.

130. PROB. Multiplier deux ou plusieurs fractions ensemble.

Regle générale. Soit que les fractions aient la même dénomination ou non, il faut, 1°. multiplier successivement tous les numérateurs ensemble, le résultat est le numérateur du produit; 2°. multiplier successivement les dénominateurs ensemble, le résultat est le dénominateur du produit; ainsi $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$; il reste à démontrer que $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$.

DÉM. Il est clair que si on proposoit de multiplier $\frac{3}{4}$ par 2 entiers, on prendroit $\frac{3}{4}$ deux fois, & on auroit $\frac{6}{4}$; mais ce n'est que par la 5e partie de 2 qu'on veut multiplier $\frac{3}{4}$; le produit $\frac{6}{4}$ est

donc cinq fois trop grand ; il faut donc le rendre cinq fois plus petit, ou, ce qui eſt la même choſe, le diviſer par 5 ; mais $\frac{6}{4}$ repréſente 6 diviſé par 4, qui doit encore être diviſé par 5 ; il doit donc être diviſé par 4 fois 5 ou par 20 (120) ; donc $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$, qui ſe réduiſent à $\frac{3}{10}$ (118) ; donc la regle générale eſt exacte ; donc $\frac{7}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{144}$; de même $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} \times \frac{6}{11} = \frac{240}{2079}$, qui ſe réduiſent à $\frac{80}{693}$; ainſi des autres.

131. Il eſt bon de faire obſerver que multiplier un nombre, ou une fraction quelconque par une fraction dont le dénominateur excede le numérateur, c'eſt rendre ce nombre ou cette premiere fraction plus petits ; car c'eſt multiplier ce nombre, ou la fraction multiplicande, par le numérateur de la fraction multiplicateur, & diviſer le produit par ſon dénominateur : or, il eſt évident qu'on rend un nombre plus petit qu'il n'eſt, ſi on le multiplie par un nombre quelconque, & qu'on diviſe le produit par un plus grand nombre : on ne doit donc pas être ſurpris de trouver qu'en multipliant $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2}$, le produit ſoit $\frac{1}{4}$, ou que $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$; on voit d'ailleurs que dans $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, on ne prend $\frac{1}{2}$ que la moitié d'une fois : donc le produit doit être la moitié de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$; de même dans $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ on ne prend le multiplicande $\frac{1}{3}$ que le quart d'une fois ; le produit doit donc être le quart de $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{12}$, &c.

132. PROB. Multiplier un nombre compoſé d'entiers & d'une fraction, réduite à ſes moindres termes, par un nombre compoſé d'entiers & de fractions.

1°. Comme c'eſt une multiplication complexe qu'on propoſe de faire, on agira ſelon la regle établie (40) ; ainſi on trouvera que le produit de

de 5 aunes $\frac{2}{3}$ par 3 aunes $\frac{3}{4}$ est $21^{au.}\ \frac{1}{4}$; ou bien, 2°. on réduit les entiers en fraction, & on multiplie les fractions à l'ordinaire (130). Reprenons le même exemple: on a (117) $5^{aunes}\ \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$; $3^{aunes}\ \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$. Or $\frac{17}{3} \times \frac{15}{4} = \frac{255}{12} = 21^{aunes}\ \frac{1}{4}$, comme ci-dessus; de même, si on multiplie par lui-même un nombre complexe, composé d'entiers & d'une fraction réduite à ses moindres termes, on aura son quarré (55), qui sera composé d'entiers & de fraction; on voit que $4\frac{3}{5} \times 4\frac{3}{5} = 21\frac{4}{25}$; car $4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$, & $\frac{23}{5} \times \frac{23}{5} = \frac{529}{25} = 21 + \frac{4}{25}$; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

133. D'où il suit que si on ajoute au numérateur d'une fraction réduite à ses moindres termes, le produit du dénominateur multiplié par un nombre quelconque d'entiers, & qu'on éleve la somme à son quarré, on aura un résultat composé d'entiers & d'une fraction, qui aura pour dénominateur le quarré du dénominateur de la fraction réduite à ses moindres termes.

Soit la fraction $\frac{3}{7}$ réduite à ses moindres termes; si on ajoute à son numérateur 3 le produit du dénominateur 7 par un nombre quelconque 5; savoir, 35, on aura $\frac{38}{7}$, dont le quarré $\frac{38}{7} \times \frac{38}{7} = \frac{1444}{49} = 29^{t}\ \frac{23}{49}$. Ainsi de tout autre nombre; donc en général le quarré d'un nombre complexe est un nombre complexe. C. Q. F. B. R.

Division des Fractions.

134. PROB. Diviser une fraction par une fraction, ou faire la division des fractions.

La fraction à diviser est le dividende, l'autre est le diviseur. Cela posé:

Regle générale. Il faut 1°. multiplier le numérateur du dividende par le dénominateur du di-

viſeur, le produit eſt le numérateur du quotient; 2°. il faut multiplier le dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur, le produit eſt le dénominatenr du quotient; ainſi $\frac{3}{4} * \frac{2}{5} = \frac{15}{8} = 1 + \frac{7}{8}$ (117); il reſte à démontrer que $\frac{3}{4} * \frac{2}{5} = \frac{15}{8}$.

DÉM. Il eſt clair que ſi on propoſoit de diviſer $\frac{3}{4}$ par 2 entiers, le quotient ſeroit $\frac{3}{8}$; car $\frac{3}{4}$ n'eſt autre choſe que 3 diviſé par 4, qui étant encore diviſé par 2, doit être diviſé par 4 fois 2, ou par 8 (120); mais ce n'eſt que par $\frac{2}{5}$, ou par la 5ᵉ partie de 2 qu'on propoſe de diviſer $\frac{3}{4}$; on a donc diviſé par un nombre 5 fois trop grand; le quotient eſt donc 5 fois trop petit; il faut donc le rétablir & le rendre 5 fois plus grand, c'eſt-à-dire, le multiplier par 5; or $\frac{3}{8}$, multiplié par 5, ou pris 5 fois, donne $\frac{15}{8}$; donc $\frac{15}{8}$ eſt le vrai quotient de $\frac{3}{4}$ diviſé par $\frac{2}{5}$; la regle générale qu'on vient d'établir eſt donc exacte: d'ailleurs, diviſer une fraction par une fraction, c'eſt réellement diviſer la fraction dividende par le numérateur de la fraction à diviſer, & multiplier le réſultat par ſon dénominateur. C. Q. F. D.

135. PROBLÊME. Diviſer un nombre compoſé d'entiers & de fractions, par un nombre compoſé d'entiers & de fractions.

SOLUTION. Il faut 1°. réduire les nombres propoſés en fractions (117), & faire la diviſion comme ci-deſſus (134); on propoſe de diviſer $12\frac{5}{7}$ par $4\frac{3}{8}$; je les réduis en fractions, & j'ai $12\frac{5}{7} = \frac{89}{7}$, & $4\frac{3}{8} = \frac{35}{8}$ (117); je fais la diviſion, & j'ai $\frac{89}{7} * \frac{35}{8} = \frac{712}{245}$, quotient qui ſe réduit à $2 + \frac{222}{245}$; de même 8 aunes $\frac{3}{5} * 2\frac{4}{7}$, donnent $\frac{43}{5} * \frac{18}{7} = \frac{3}{90} = 3\frac{31}{90}$, quotient cherché; ainſi des autres.

D'où l'on déduit, 1°. que pour divifer un nombre entier par une fraction, il faut le multiplier par le dénominateur de la fraction, & divifer le produit par le numérateur; $12 * \frac{3}{4} = \frac{48}{3} = 16$; 2°. que pour divifer une fraction par un nombre entier, il faut multiplier fon dénominateur par ce nombre $\frac{5}{7} * 4 = \frac{5}{28}$, quotient cherché; car c'eft divifer 5 fucceffivement par 7 & par 4, ou par 28 (120). Donc le quotient de la fraction $\frac{5}{7}$, divifé par 4, eft $\frac{5}{28}$, &c. C. Q. F. B. R.

Des Fractions de Fractions.

136. DÉF. On appelle *fractions de fractions* les parties quelconques d'une fraction, comme $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{7}$ de $\frac{2}{9}$; $\frac{3}{8}$ de $\frac{11}{12}$, font des fractions de fractions; on prononce trois quarts de deux cinquiemes, cinq feptiemes de deux neuviemes, & trois huitiemes de onze douziemes.

137. PROB. Réduire les fractions de fractions en fractions de l'entier.

Regle générale. Il faut 1°. multiplier fucceffivement les numérateurs enfemble, le produit eft le numérateur cherché; 2°. il faut multiplier fucceffivement les dénominateurs enfemble, le produit eft le dénominateur de la fraction réduite; ainfi $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6} = \frac{15}{24}$ de l'entier.

DÉM. Il eft clair que fi on prenoit le quart de $\frac{5}{6}$, on auroit $\frac{5}{24}$; car ce feroit divifer par 4 le numérateur qui eft déjà divifé par 6, ou le divifer par fix fois $4 = 24$; mais c'eft trois fois le quart de $\frac{5}{6}$ qu'on fe propofe de prendre; c'eft donc trois fois $\frac{5}{24}$ qu'on doit avoir, ou $\frac{15}{24}$; ainfi des autres. C. Q. F. Dém.

138. D'où il fuit qu'on peut faire fur les fractions de fractions toutes les opérations qu'on peut

faire sur les fractions ordinaires; il n'y a d'abord qu'à les réduire en fractions de l'entier (137); ensuite les ajouter, les soustraire, les multiplier, les diviser, les évaluer, les réduire à leurs moindres termes, &c. comme les fractions ordinaires.

Il est indispensable de se rendre familier le calcul des fractions : on en fait usage dans toutes les parties des Mathématiques, dans le commerce, la finance, &c. Au moyen de ce calcul, on résoud des questions intéressantes, tandis que les moindres difficultés arrêtent ceux qui ont négligé de l'apprendre. Pour inviter les commençans à s'y exercer, on leur proposera les problêmes suivans.

Application de la théorie des Fractions à la solution de quelques questions intéressantes.

139. PROB. Un détachement de soixante grenadiers, commandé par un Capitaine & un Lieutenant, s'est distingué dans une action; le Général leur fait distribuer une somme de 12000#, ensorte que le Capitaine doit en avoir les $\frac{2}{5}$, le Lieutenant les $\frac{3}{8}$, & le reste doit être distribué également aux soixante grenadiers; que revient-il à chacun?

SOLUTION. Je réduis les fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{8}$ à la même dénomination (125). J'ai $\frac{2}{5} = \frac{16}{40}$, & $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$; ainsi le Capitaine & le Lieutenant auront ensemble $\frac{31}{40}$ de la récompense, les Soldats $\frac{9}{40}$; car $\frac{16}{40} + \frac{15}{40} + \frac{9}{40} = \frac{40}{40}$ = l'entier dont il est question, c'est-à-dire, 12000#; il ne s'agit donc que de partager 12000# en 40 parties égales, d'en donner 16 au Capitaine, 15 au Lieutenant, & de distribuer les 9 autres aux 60 Soldats; or

la 40ᵉ partie de 12000ᵗᵗ eſt $\frac{12000}{40}$ = 300ᵗᵗ ; conſéquemment le Capitaine aura 300 × 16 = 4800ᵗᵗ ; le Lieutenant 300 × 15 = 4500ᵗᵗ, & les Soldats 300 × 9 = 2700ᵗᵗ, ce qui fait pour chacun d'eux $\frac{2700}{60}$ = 45ᵗᵗ, & ces trois ſommes 4800 + 4500 + 2700 = 12000ᵗᵗ. C. Q. F. Dét.

140. PROB. Les $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ d'un vaiſſeau ſont plongés dans l'eau, & il y a 18 pieds hors de l'eau, quelle eſt la hauteur du vaiſſeau ?

SOLUTION. $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ = $\frac{15}{24}$; mais par l'état de la queſtion $\frac{15}{24}$ + 18ᵖⁱ = $\frac{24}{24}$, hauteur du vaiſſeau ; donc 18ᵖⁱ = $\frac{9}{24}$; ſi on multiplie de part & d'autre par 24, on aura 24 × 18ᵖⁱ = 9 fois la hauteur du vaiſſeau ; donc, en diviſant par 9, on aura la hauteur = $\frac{24 \times 18^{pi}}{9}$ = 48 pieds. Ce vaiſſeau a donc 48ᵖⁱ de hauteur ; en effet les $\frac{5}{6}$ de 48 ſont 40, les $\frac{3}{4}$ de 40 ſont 30, qui avec les 18 pieds qui ſont hors de l'eau, font 48 pieds. C.Q.F.Dét.

AUTRE SOLUTION. Si on exprime par x la hauteur du vaiſſeau, on aura, ſelon l'état de la queſtion, $\frac{15}{24}x + 18^{pi} = x$, & multipliant l'équation par 24, on aura $15x + 24 \times 18^{pi} = 24x$, ôtant $15x$ de part & d'autre, on aura $24 \times 18^{pi} = 9x$, d'où $x = \frac{24 \times 18^{pi}}{9}$ = 48 pieds, hauteur du vaiſſeau, comme ci-deſſus. C. Q. F. Dét.

141. PROB. L'eau d'un réſervoir s'écoule par trois tuyaux. Elle s'écoule par le premier dans douze heures, par le ſecond dans dix heures, & par le troiſieme dans ſix heures : on demande en combien de tems le réſervoir ſe vuidera, les trois tuyaux étant ouverts.

SOLUTION. J'obſerve que ſi l'eau du réſervoir s'écoule par le premier tuyau dans douze heures,

il s'en écoulera $\frac{1}{12}$ dans une heure ; par la même raison il s'en écoulera $\frac{1}{10}$ par le second tuyau, & $\frac{1}{6}$ par le troisieme ; ainsi l'eau qui sortira par ces trois tuyaux dans une heure sera $\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{6}=\frac{5}{60}+\frac{6}{60}+\frac{10}{60}=\frac{21}{60}$; mais toute l'eau du réservoir est exprimée par 1 ; il faut donc pour déterminer le tems nécessaire à l'écoulement de toute l'eau, diviser 1 par les $\frac{21}{60}$ de toute l'eau qui s'écoule dans une heure. Or, $1 * \frac{21}{60}=\frac{60}{21}=2^{\text{heures}}+\frac{18}{21}=2^{\text{h.}}+\frac{6}{7}^{\text{d'heure}}$; l'eau du réservoir s'écoulera donc dans 2 heures $+\frac{6}{7}$ d'heure ; cela est vrai, car dans une heure il s'en écoule $\frac{21}{60}$; donc dans $2^{\text{h.}}$ il s'en écoulera $\frac{42}{60}$, & dans $\frac{6}{7}$ d'heure, il s'en écoulera $\frac{18}{60}$, qui sont les $\frac{6}{7}$ de $\frac{21}{60}$, volume d'eau qui s'écoule dans une heure; donc, &c. C. Q. F. D.

142. PROB. Un vaisseau qui vient d'essuyer une tempête, fait une voie d'eau capable de remplir la cale en 18 heures; on fait jouer deux pompes, dont la premiere la vuideroit en 36 heures, & la seconde en 24 heures. L'eau qui est entrée dans le vaisseau lorsque les pompes commencent à jouer, est les $\frac{3}{8}$ de la capacité de la cale : on demande en combien de tems la cale sera vuidée.

SOLUTION. D'après l'état de la question, la premiere pompe vuide $\frac{1}{36}=\frac{2}{72}$ d'eau dans une heure; la seconde $\frac{1}{24}=\frac{3}{72}$, & il en entre dans la cale $\frac{1}{18}=\frac{4}{72}$; donc l'eau qui se vuidera dans une heure sera $\frac{2}{72}+\frac{3}{72}-\frac{4}{72}=\frac{1}{72}$; mais l'eau qui est dans la cale est exprimée par $\frac{3}{8}$; donc le tems qu'il faudra pour la vuider sera $\frac{3}{8} * \frac{1}{72}=\frac{216}{8}=27$ heures. Ainsi l'équipage sera obligé de faire jouer les pompes pendant 27 heures; car si dans une heure il sort $\frac{1}{72}$ d'eau, dans 27 heures il en sortira $\frac{27}{72}=\frac{3}{8}$ (122). Donc, &c. C. Q. F. Dét.

143. PROB. La sixieme partie d'une armée a resté sur le champ de bataille, les $\frac{3}{4}$ ont pris la fuite, & 10000 ont été faits prisonniers, de combien d'hommes l'armée étoit-elle composée?

SOLUTION. Il est clair que $\frac{1}{6} + \frac{3}{4}$ d'une armée en sont les $\frac{11}{12}$ (127), il reste donc $\frac{1}{12}$; parce que l'entier, qui est ici l'armée, est exprimé par $\frac{12}{12}$; mais ce reste $\frac{1}{12}$ contient 10000 hommes. Donc cette armée étoit composée de 12 fois 10000 hommes, ou de 120000 hommes; car le $\frac{1}{6}$ de morts qui est 20000, les $\frac{3}{4}$ de fuyards qui sont 90000, & les 10000 prisonniers, font ensemble les 120000 hommes.

AUTRE SOLUTION. Si on exprime l'armée par x, on aura $\frac{1}{6}x + \frac{3}{4}x + 10000 = x$, ou $\frac{2}{12}x + \frac{9}{12}x + 10000 = x$, ou $\frac{11}{12}x + 10000 = x$. Si on multiplie l'équation par 12, on aura $11x + 120000 = 12x$; ôtant $11x$ de part & d'autre, on aura $x = 120000$ hommes. C. Q. F. Dét.

144. PROB. L'aiguille des minutes va douze fois plus vîte que celle des heures; elles partent ensemble du point de midi; il s'agit de déterminer tous les points où elles doivent se rencontrer dans le tems que l'aiguille des heures fait le tour du cadran.

SOLUTION. 1°. Il est clair que lorsque l'aiguille des heures marque une heure, celle des minutes aura fait le tour du cadran, & sera au point de midi; ainsi l'intervalle qui séparera les deux aiguilles sera $\frac{1}{12}$ du cadran; 2°. si l'on fait attention que l'aiguille des minutes ne peut atteindre celle des heures que par son excès de vîtesse, on remarquera que la vitesse de l'aiguille des heures étant 1, celle des minutes 12, l'excès de vîtesse

sera 11 ; conséquemment si on divise l'intervalle 1 qu'il y a entre une heure & l'heure suivante en 11 parties égales, ou en $\frac{11}{11}$; tandis que l'aiguille des heures parcourra $\frac{1}{11}$, celle des minutes parcourra $\frac{12}{11}$; mais l'intervalle qu'il y a entre les deux aiguilles est $\frac{11}{11}$; donc elles se rencontreront à $\frac{1}{11}$ de la seconde heure, c'est-à-dire, à $1^{h.}\frac{1}{11}$; ces deux aiguilles partant de ce point, se trouveront à la fin du second tour du cadran, savoir, celle des minutes au point de $1^{h.}\frac{1}{11}$, & celle des heures au point de $2^{h.}\frac{1}{11}$; l'intervalle qui les sépare est de 1 heure $= \frac{11}{11}$; & tandis que l'aiguille des heures fera le second onzieme de la seconde heure, celle des minutes fera $\frac{12}{11}$; donc ces aiguilles se rencontreront à $2^{h.}$; $\frac{2}{11}$; par la même raison elles se rencontreront à $3^{h.}\frac{3}{11}$; à $4^{h.}\frac{4}{11}$; à $5^{h.}\frac{5}{11}$; à $6^{h.}\frac{6}{11}$; à $7^{h.}\frac{7}{11}$; à $8^{h.}\frac{8}{11}$; à $9^{h.}\frac{9}{11}$; à $10^{h.}\frac{10}{11}$; à $11^{h.}\frac{11}{11}$ = midi. On résoud aussi ces sortes de questions par les propriétés des progressions géométriques, ou par les loix du mouvement. C. Q. F. Dét.

145. On veut distribuer des pommes à six particuliers ; on donne au premier les $\frac{2}{3}$ du tout, au second les $\frac{2}{3}$ du reste, au troisieme les $\frac{2}{3}$ du reste, ainsi de suite, il arrive que le sixieme n'a qu'une pomme, combien y en avoit-il ?

SOLUTION. Si on exprime par x le nombre des pommes, on trouvera que la part du premier est $\frac{2}{3}x$, celle du second $\frac{2}{9}x$, celle du 3e, $\frac{2}{27}x$; celle du 4e, $\frac{2}{81}x$; celle du 5e, $\frac{2}{243}x$, & celle du 6e, 1 pomme ; & comme toutes ces parts font le nombre total des pommes, on aura cette équation, $\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}x + \frac{2}{81}x + \frac{2}{243}x + 1 = x$. Si on multiplie l'équation par le plus grand dénominateur 243, on aura $162x$

$+ 54x + 18x + 6x + 2x + 243 = 243x$, ou corrigeant $242x + 243 = 243x$, & ôtant $242x$ de part & d'autre, on aura $x = 243$, nombre des pommes. Car les $\frac{2}{3}$ de 243 font 162, part du premier; il reste 81, dont les $\frac{2}{3}$ font 54, part du second; il reste 27, dont les $\frac{2}{3}$ font 18, part du 3e; il reste 9 pommes, dont les $\frac{2}{3}$ font 6, part du 4e; il reste 3 pommes, dont les $\frac{2}{3}$ font 2, part du 5e; & il reste 1 pomme, part du 6e. C. Q. F. Dét.

Des Fractions continues.

146. Déf. Si on a une fraction dont les termes soient premiers entr'eux, & exprimés par de grands nombres, & qu'on en veuille désigner en petits nombres la valeur très-approchée, on transformera la fraction en une seule décroissante qui formera une *fraction continue*; les fractions particulieres qui entrent dans son expression peuvent en être appellées les *fractions intégrantes*, parce qu'à leur aide on rétablit la fraction proposée. Eclaircissons ceci par un exemple: soit le rapport approché du diametre du cercle à sa circonférence exprimée par cette fraction $\frac{100000}{314159}$, dont le numérateur représente le diametre, & le dénominateur sa circonférence.

Procédé. 1°. Je divise les 2 termes de la fraction $\frac{100000}{314159}$ par le numérateur, on a pour quotient $\frac{1}{3 + \frac{14159}{100000}}$; si on néglige la fraction $\frac{14159}{100000}$, qui est jointe au dénominateur 3, on aura la fraction $\frac{1}{3}$, qui sera plus grande que la fraction proposée.

2°. Je divise les termes de la fraction $\frac{14159}{100000}$ par le numérateur 14159, & j'ai $\frac{1}{7 + \frac{887}{14159}}$. Substi-

tuant, la fraction proposée sera représentée par cette suite $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{887}{14159}}}$. Si on néglige cette fraction $\frac{887}{14159}$, qui doit être ajoutée au dénominateur 7, la fraction proposée sera représentée par $\frac{1}{3+\frac{1}{7}}=\frac{1}{\frac{22}{7}}=\frac{7}{22}$, qui est un peu trop petite, parce que le dénominateur 7 est trop petit de la fraction $\frac{887}{14159}$; mais ce 7 devient numérateur de la fraction $\frac{7}{22}$, qui représente la fraction proposée $\frac{100000}{314159}$; donc la fraction $\frac{7}{22}$ est trop petite.

3°. Je divise les termes de la fraction $\frac{887}{14159}$ par le numérateur 887, & j'ai $\frac{1}{15+\frac{854}{887}}$; je substitue, & j'ai pour la valeur de la fraction proposée $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{854}{887}}}}$; si je néglige $\frac{854}{887}$; la fraction proposée sera représentée par $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{106}{15}}}=\frac{1}{3+\frac{15}{106}}=\frac{1}{\frac{333}{106}}=\frac{106}{333}$; ainsi la fraction $\frac{100000}{314159}$ sera représentée par celle-ci $\frac{106}{333}$, qui en approche beaucoup, & qui est un peu trop grande, parce que la fraction négligée $\frac{854}{887}$ devroit être ajoutée, au dénominateur 15, qui se trouve dans le dénominateur 333.

4°. Je divise les termes de la fraction $\frac{854}{887}$ par le numérateur 854, & j'ai $\cfrac{1}{1+\cfrac{33}{854}}$; je substitue; & pour valeur de la fraction $\frac{100000}{314159}$, j'ai

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{33}{854}}}}}.$$

Comme ce numérateur 33 est petit, par rapport à son dénominateur 854, la fraction $\frac{100000}{314159}$ sera représentée par . . . . . .

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{16}{113}} = \cfrac{1}{\cfrac{355}{113}} = \frac{113}{355},$$

valeur très-approchée de la fraction proposée; mais qui est plus petite, parce que la fraction négligée devroit faire partie du numérateur 113 de la fraction $\frac{113}{355}$, qui représente la fraction proposée $\frac{100000}{314159}$. Si on suivoit le même procédé, on trouveroit une suite de fractions qui seroit alternativement plus grande & plus petite que la fraction proposée, & qui en approcheroit de plus en plus.

Pour faire voir que la suite, ou fraction continue,

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{33}{854}}}}} = \frac{100000}{314159},$$

fraction proposée; 1°. j'ajoute la fraction $\frac{33}{854}$ au dénominateur 1 de la fraction $\frac{1}{1}$ & j'ai

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{33}{854}} = \cfrac{1}{\cfrac{887}{854}} = \frac{854}{887};$$

j'ajoute cette fraction $\frac{854}{887}$ au dénominateur 15, & j'ai $\frac{1}{\frac{15\times887+854}{887}} = \frac{887}{14159}$; j'ajoute cette fraction $\frac{887}{14159}$ au dénominateur 7 de la fraction $\frac{1}{7}$, & j'ai $\frac{1}{\frac{7\times14159+887}{14159}} = \frac{14159}{100000}$. J'ajoute cette fraction $\frac{14159}{100000}$ au dénominateur 3 de la fraction $\frac{1}{3}$, & j'ai $\frac{1}{\frac{3\times100000+14159}{100000}} = \frac{100000}{314159}$, qui est la fraction proposée rétablie.

Ce qu'on vient de dire sur les fractions continues, ainsi que le problême suivant, regardent les Géometres.

147. PROB. Trouver tous les diviseurs possibles exacts d'un nombre donné.

Regle générale. Il faut diviser le nombre proposé par 2, le premier quotient encore par 2, le troisieme par 2, jusqu'à ce que le quotient ne soit plus divisible par 2; alors il faut tenter la division du dernier quotient par 3, ou par 5, ou par 7, c'est-à-dire par les nombres premiers, & diviser toujours les quotiens successifs par le même nombre, autant qu'il est possible; on parvient à un quotient qui n'est divisible que par lui-même, & qui donne l'unité pour quotient; cela fait, on multiplie le premier diviseur simple par le second, on met le produit à la suite du second; le 3e diviseur simple multiplie tous les diviseurs simples qui le précedent, & les produits se mettent à la suite; le 4e diviseur simple multiplie de même tous les diviseurs simples qui le précedent, ainsi que ceux écrits à leur suite, les produits s'écrivent à la suite de ce 4e diviseur simple, &

ſont tous diviſeurs du nombre propoſé ; ainſi du reſte. Un exemple éclaircira tout ceci. On propoſe de trouver tous les diviſeurs exacts de 360.

Proc. 360 ⎫ 2
180 ⎪ 2.. 4
90 ⎪ 2.. 8
45 ⎬ 3.. 6..12..24
15 ⎪ 3.. 9..18..36..72
5 ⎪ 5..10..15..20..40..30..60..120..45..90..180..360;
1 ⎭

Les diviſeurs de 360 ſont donc au nombre de 24 ; ſavoir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

DÉM. On voit que 90 étant contenu deux fois dans 180, & 180 deux fois dans 360, ſera contenu quatre fois dans 360 ; donc 4 eſt diviſeur de 360 : 2°. 45 étant contenu deux fois dans 90, & 90 quatre fois dans 360, eſt contenu huit fois dans 360 ; donc 8 eſt diviſeur de 360. Par un ſemblable raiſonnement, on prouvera que les autres nombres qu'on a trouvés par la regle générale, dès l'unité juſqu'à 360 ſont tous diviſeurs de 360 ; il n'eſt pas moins clair qu'en ſuivant cette regle on a trouvé tous les diviſeurs poſſibles du nombre propoſé 360 ; ainſi des autres. C. Q. F. Dém.

Des Fractions Décimales.

148. DÉF. Les fractions décimales ou les parties décimales, comme on l'a vu (8), ne ſont autre choſe que la numération continuée au deſſous de l'unité, ou ce ſont des fractions qui ont pour dénominateur l'unité, ſuivie d'un ou de pluſieurs zéros, & dont le dénominateur eſt ſup-

primé. Comme les fractions décimales s'écrivent à la suite des entiers, on sépare les unes des autres par une virgule. Pour lire ces sortes de fractions, on supplée au dessous d'elles l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres après la virgule; ainsi 3,8 représente 3 entiers & 8 dixiemes, ou 38 dixiemes; 0,75 représente 75 centiemes; 42,73589 représente quatre millions deux cents soixante & treize mille cinq cents quatre-vingt-neuf cents-milliemes, &c. *voyez le* n° 8. Cela posé, il n'y aura plus de difficulté pour écrire une fraction décimale quelconque. C. Q. F. B. R.

149. PROB. Changer une fraction ordinaire en fraction décimale.

Regle générale. 1°. On réduira le numérateur, considéré comme des entiers, en dixiemes, en le multipliant par 10; on divisera le produit par le dénominateur, le quotient donnera des dixiemes, qu'on écrira au rang des dixiemes, c'est-à-dire immédiatement après la virgule; 2°. on réduira le reste en centiemes, en le multipliant par 10, parce que des dixiemes multipliés par des dixiemes donnent des centiemes; on divisera le produit par le même dénominateur, on mettra le quotient au rang des centiemes; 3°. s'il y a un reste on le multipliera par 10, pour avoir des milliemes, qu'on divisera par le dénominateur; on mettra le quotient au rang des milliemes; enfin on suivra l'opération en multipliant chaque reste par 10, & divisant le produit par le dénominateur, chaque quotient se mettra au rang de sa dénomination, jusqu'à ce que le reste soit si petit, qu'il ne differe pas de zéro, ou qu'il puisse être négligé sans erreur sensible, ou jusqu'à ce

qu'il ne reste rien, si la chose est possible : on trouvera donc que

1°. . . $\frac{3}{5}$ = 0,6 . . . . ou $\frac{6}{10}$
2°. . . $\frac{7}{8}$ = 0,875 . . . ou $\frac{875}{1000}$
3°. . . $\frac{12}{25}$ = 0,48 . . . ou $\frac{48}{100}$
4°. . . $\frac{2}{15}$ = 0,1333333 &c. à l'infini.
5°. . . $\frac{3}{24}$ = $\frac{1}{8}$ = 0,125 . . . ou $\frac{125}{1000}$
6°. . . $\frac{1}{7}$ = 0,142857142857142857 &c. à l'infini.
7°. . . $\frac{26}{99}$ = 0,26262626 &c. à l'infini ; ainsi des autres. C. Q. F. Dét.

150. DÉF. Lorsqu'en changeant une fraction ordinaire en fraction décimale, on retrouve les mêmes chiffres, ces chiffres se nomment *période*; dans le sixieme exemple la période est de six chiffres, 142857 ; dans le quatrieme, la période n'a qu'un chiffre ; dans le dernier exemple la période a deux chiffres, 26, &c.

151. THÉORÊME. Tout dividende plus petit que son diviseur, composé d'un ou de plusieurs 9, donne pour quotient une suite infinie de périodes où le dividende se trouve répété, & dont chacune contient autant de chiffres qu'il y a de 9 dans le diviseur.

2°. Et réciproquement, toute suite infinie de périodes décimales est égale au quotient d'une période divisée par un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période, à la suite desquels on mettra autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux avant la premiere période.

A demontrer 1°. Que 2✻99 = 0,02020202, &c. à l'infini.

DÉMONST. Il est évident que pour diviser un

nombre plus petit que 99 par 99, il faut le résoudre en centiemes, & qu'on aura autant de cent centiemes que le dividende contient d'unités, & que chaque cent centieme divisé par 99 donne un centieme au quotient & un centieme de reste, le quotient aura donc autant de centiemes que le dividende contient d'unités; mais pour exprimer des centiemes il faut deux chiffres décimaux: on aura donc dans cet exemple deux centiemes pour premiere période & deux centiemes de reste, qu'il faudra réduire en centiemes de centiemes, ou les multiplier par cent, pour pouvoir les diviser par 99, & on aura autant de centiemes de centiemes au quotient que le dividende contient d'unités, ce qui donne les deux mêmes chiffres pour la seconde période; ainsi de suite; ce qui est confirmé par la division même. On démontrera par un semblable raisonnement que $\frac{37}{99}$=0,37373737, &c. & que .... $\frac{42}{999}$=0,042042042, &c. à l'infini.

2°. Le second cas est évident; car si 0,373737, &c. est le résultat de 37 ✳ 99, il faut que la suite infinie de périodes décimales soit égale à une période divisée par autant de 9 qu'elle contient de chiffres; ici, par exemple, la période est égale à $\frac{37}{99}$: il ne s'agit donc que de démontrer qu'une fraction décimale composée de dixiemes, de centiemes, &c. & d'une suite de périodes égales, est égale à la fraction décimale qui précede la premiere période, plus une de ces périodes divisée par un nombre composé d'autant de 9 qu'elle contient de chiffres, & à la suite desquels 9 on écrira autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux avant la premiere période.

A démontrer que 0,004262626 &c. est égale à $\frac{4}{1000}+\frac{26}{99000}$.

DÉM.

DÉM. Si la premiere période 26 occupoit le premier rang après la virgule, la suite infinie feroit, comme on vient de voir, $\frac{26}{99}$; mais comme elle ne commence qu'après le rang des mille, le nombre $\frac{26}{99}$ se trouve mille fois trop grand; il faut donc le rendre mille fois plus petit en le divisant par 1000; ainsi la valeur de toutes les périodes de cette fraction décimale 0,004262626 &c. est $\frac{26}{99000}$: mais la fraction décimale 0,004 qui précede les périodes en est indépendante; elle fait donc partie de la fraction totale; il faut donc l'ajouter à ce quotient $\frac{26}{99000}$, pour avoir sa valeur entiere $\frac{4}{1000} + \frac{26}{99000}$. C. Q. F. 2°. Dét.

152. D'où il suit, que toute fraction décimale à période peut se changer en fraction ordinaire; car dans ce dernier exemple, en réduisant les fractions $\frac{26}{99000}$ & $\frac{4}{1000}$, à la même dénomination, on aura $\frac{26}{99000}$ & $\frac{396}{99000}$, dont la somme $\frac{422}{99000}$ = 0,004262626, &c. ou $\frac{211}{49500}$; ainsi des autres. On a trouvé (149), que $\frac{1}{7}$ = 0,142857142857 &c., & il faut (151) que cette suite infinie soit égale à $\frac{142857}{999999}$; or cette fraction réduite à ses moindres termes, devient $\frac{1}{7}$, en divisant les deux termes par le numérateur 142857; ce qui confirme ce théorême. C. Q. F. B. R.

153. 1°. Une fraction décimale ne change point de valeur, si après le dernier chiffre on écrit un ou plusieurs zéros; 2°. on multiplie une fraction décimale par 10, par 100, par 1000, par 10000, &c. en avançant la virgule vers la droite d'autant de rangs qu'il y a de zéros dans le nombre qui multiplie; 3°. on divise une fraction décimale par 10, par 100, par 1000, &c. en avançant la virgule vers la gauche d'autant

de rangs qu'il y a de zéros dans le nombre qui divise.

DÉM. 1°. Il eſt clair que 2,4 = 2,400000, car 2 entiers & 400000 millioniemes ne font autre choſe que 2 entiers & 4 dixiemes, puiſque $2,400000 = \frac{2400000}{1000000} = \frac{24}{10} = 2\frac{4}{10} = 2,4$ (148). C. Q. F. 1°. D.

2°. Il eſt évident qu'on rend le nombre 2,3459 dix fois plus grand en écrivant 23,459; car 9 qui repréſentoit des dix milliemes, repréſente des milliemes; par la même raiſon chaque chiffre devient dix fois plus grand : donc 23,459 eſt dix fois plus grand que 2,3459 : on prouvera de même que 234,59 eſt cent fois plus grand que 2,3459; que 2345,9 eſt mille fois plus grand que 2,3459; enfin, que 23459 eſt dix mille fois plus grand que 2,3459; car 23459 entiers valent dix mille fois $\frac{23459}{10000}$=2,3459. C. Q. F. 2°. D.

3°. Par une raiſon contraire, on rend le nombre 4567,8 dix fois plus petit en écrivant 456,78; car 8 qui repréſentoit des dixiemes, ne repréſente plus que des centiemes; par la même raiſon, chaque chiffre devient dix fois plus petit: donc 456,78 eſt dix fois plus petit que 4567,8: donc, &c. C. Q. F. 3°. D.

154. D'où il ſuit, que pour déterminer le rapport de deux fractions décimales, il n'y a qu'à leur donner la même dénomination, & regarder les deux nouvelles fractions comme des nombres entiers; les deux fractions propoſées ſeront entr'elles géométriquement comme ces deux nombres.

Soient les fractions décimales 2,34 & 0,19234; on aura 2,34=2,34000, & je dis que 2,34000 : 0,19234 :: 234000 : 19234; car on a multiplié

les 2 premiers termes de cette proportion par 100000, pour en faire les termes du ſecond rapport : or, deux grandeurs qui deviennent 100000 fois plus grandes ne changent point de rapport : donc, &c. C. Q. F. B. R.

155. PROB. Trouver la valeur d'une fraction décimale en parties de l'entier.

SOLUTION. *Regle générale.* Il faut 1°. multiplier la fraction décimale, conſidérée comme des entiers, par les parties de l'entier, & diviſer le produit par le dénominateur de la fraction décimale, le quotient donne les parties que l'on cherche, ou la valeur de la fraction.

Propoſons-nous de ſavoir ce que valent de pieds, de pouces, de lignes, &c. 0,787 de toiſe ; je multiplie 787 par 6 pieds, je diviſe le produit 4722 pieds par 1000, le quotient eſt 4 pieds, & il y a un reſte de 722^{pi}, que je multiplie par 12 pouces ; j'ai 8664^{po}, que je diviſe par 1000 ; & j'ai 8^{po} au quotient & 664^{po} de reſte, que je multiplie par 12 lignes ; j'ai 7968^{lig}, que je diviſe par 1000, le quotient eſt 7 lignes & $\frac{968}{1000}$ de ligne, que je néglige. Ainſi la fraction décimale 0,787 de toiſe $=4^{pi}\ 8^{po}\ 7^{lig}$ & $\frac{968}{1000}$ de ligne : on trouvera de même que 0,27 de livre valent $5^{f}\ 4^{d}\ \frac{80}{100}$; ainſi des autres. C. Q. F. Dét.

156. Les principes précédens étant bien entendus, il ſera facile d'additionner, de ſouſtraire, de multiplier & de diviſer les fractions décimales ou les nombres compoſés d'entiers & de parties décimales.

1°. L'addition & la ſouſtraction ne ſouffrent aucune difficulté : on écrit les dixiemes ſous les dixiemes, les centiemes ſous les centiemes, les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixai-

nes, &c. & on opere comme dans l'addition & la soustraction ordinaire; la démonstration est aussi la même : il suffit de donner un exemple de chacune avec leur preuve.

Exemple d'Addition.		*Ex. de Soustraction.*	
246,34		9402,780200	
84,7824		87,998765	
9,074		9314,781435	Reste.
572,8		9402,780200	Preuve.
912,9964	Somme.		
7			
19			
21			
18			
1964			
912,9964	Preuve.		

De la multiplication des Fractions Décimales.

157. PROB. Multiplier deux nombres décimaux, ou faire la multiplication des fractions décimales.

Regle générale. Il faut multiplier les deux nombres considérés comme des entiers, & donner au produit autant de décimales qu'il y en a dans le multiplicande & le multiplicateur ; c'est-à-dire, que s'il y a 3 chiffres écrits après la virgule dans le multiplicande, & 2 dans le multiplicateur, il y en aura 5 dans le produit.

Exemple.	23,283	Milliemes, multiplicande.
	0,28	Centiemes, multiplicateur.
	186264	
	46566	
Produit.	6,51924	Cent-milliemes.

Il s'agit donc de démontrer que des milliemes multipliés par des centiemes produisent des cent milliemes. Or si on multiplioit des milliemes par des unités, le produit seroit des milliemes, puisqu'on prendroit autant de fois ces milliemes qu'il y auroit d'unités dans le multiplicateur; mais ce n'est que par des centiemes d'unités qu'on propose de multiplier ces milliemes; le produit doit donc être cent fois plus petit que si on multiplioit ces milliemes par des unités : or, une partie cent fois plus petite que des milliemes est un cent-millieme; donc des milliemes multipliés par des centiemes donnent des cent-milliemes; la virgule doit donc laisser cinq chiffres à sa droite, c'est-à-dire le nombre des décimales du multiplicande & du multiplicateur. Par un semblable raisonnement on prouvera 1°. que des unités multipliées par des dixiemes, par des centiemes, par des milliemes, &c. produiront des dixiemes, des centiemes, &c; 2°. que des dixiemes multipliés par des dixiemes produiront des centiemes; 3°. que des centiemes multipliés par des dixiemes produiront des milliemes, & qu'en général les décimales du produit feront la somme des décimales du multiplicande & du multiplicateur; donc la regle générale est exacte. C.Q.F.D.

2e *Exemple.* 0,003 Milliemes.
0,0004 Dix milliemes.

Produit. 0,0000012 Dix millioniemes;

parce que des milliemes multipliés par des dix milliemes, produisent des dix millioniemes: $\frac{3}{1000} \times \frac{4}{10000} = \frac{12}{10000000} = 0,0000012.$

3e *Exemple.* 4,094 Milliemes.
0,006 Milliemes.

Produit. 0,024564 Millioniemes;

parce que des milliemes multipliés par des milliemes, produisent des millioniemes: $\frac{7}{1000} + \frac{3}{1000} = \frac{21}{1000000}$.

4e *Exemple.* 37,708 Milliemes.
1,9354 Dix milliemes.

150832
188540
113124
339372
37708

Produit. 72,9800632 Dix millioniemes;

parce que des milliemes multipliés par des dix milliemes, produisent des dix millioniemes: on voit que $\frac{8}{1000} \times \frac{11}{10000} = \frac{88}{10000000} = 0,0000088.$ Ces exemples suffisent.

158. *Observation sur la multiplication des fractions décimales.*

Souvent on a deux nombres composés de plusieurs chiffres décimaux, & on ne veut au produit qu'un certain nombre de décimales:

par exemple, on a des billioniemes, ſavoir 128,258978274 à multiplier par des cent-millioniemes 82,00045721, & il ſuffit d'avoir au produit des millioniemes, parce qu'on peut, ſans erreur ſenſible, regarder comme zéro ce qui viendroit au deſſous des millioniemes; dans ce cas, il n'eſt pas néceſſaire de multiplier tous les chiffres du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur; il faut ſeulement multiplier par chaque chiffre du multiplicateur, en commençant par le premier chiffre à gauche, le chiffre du multiplicande, qui donne un produit d'un degré au deſſous des décimales qu'on demande, & ſuivre la multiplication des chiffres précédens du multiplicande à l'ordinaire. Dans cet exemple, le premier chiffre 8 du multiplicateur étant au rang des dixaines, doit commencer à multiplier le chiffre 7 du multiplicande qui eſt au rang des cent-millioniemes, pour avoir au produit des dix-millioniemes; parce que ſi l'on multiplioit des cent-millioniemes par des unités, le produit ſeroit des cent-millioniemes, mais on les multiplie par des dixaines d'unités; le produit doit donc être dix fois plus grand, c'eſt-à-dire des dix-millioniemes. La multiplication, par ces 8 dixaines, donnera donc 10260,7182616. Par un ſemblable raiſonnement, on trouvera 1°. que les unités du multiplicateur doivent commencer à multiplier le chiffre 2 du multiplicande qui eſt au rang des dix-millioniemes; 2°. que le 4 du multiplicateur qui eſt au rang des dix-milliemes, doit commencer à multiplier le chiffre 8 du multiplicande qui eſt au rang des milliemes, pour avoir au produit des dix-millioniemes; parce que des dix-milliemes multi-

pliant des milliemes, donnent des dix-millioniemes; 3°. que le 5 du multiplicateur qui est au rang des cent-milliemes, doit commencer à multiplier le chiffre 5 du multiplicande qui est au rang des centiemes, pour avoir des dix-millioniemes; 4°. que le 7 du multiplicateur qui est au rang des millioniemes, doit commencer à multiplier le 2 du multiplicande qui est au rang des dixiemes, pour avoir au produit des dix-millioniemes; 5°. que le 2 du multiplicateur qui est au rang des dix-millioniemes, doit commencer à multiplier le 8 du multiplicande qui est au rang des unités; enfin 6°. que le dernier chiffre 1 du multiplicateur qui est au rang des cent-millioniemes, doit commencer à multiplier le chiffre 2 du multiplicande qui occupe le rang des dixaines, pour avoir au produit des dix-millioniemes; ainsi de tout autre exemple. Pour rendre ceci sensible, voici le produit de chaque chiffre du multiplicande.

128,258978274	Multiplicande.
82,00045721	Multiplicateur.
10260,7182616	Prod. de 8 dixaines.
256,5179564	. . . . . de 2 unités.
0,0513032	. . . . . de 4 dix milliemes.
0,0064125	. . . . . de 5 cent milliemes.
0,0008974	. . . . . de 7 millioniemes.
0,0000256	. . . . . de 2 dix millioniemes.
0,0000012	. . . . . de 1 cent millioniemes.
10517,2948579	Produit total, ou bien

10517,294858, mettant à la place de 9 dix millioniemes, un millioniеme. Si ce dernier chiffre 9 étoit 5, ou plus

petit que 5, on le négligeroit totalement, & on prendroit pour le vrai produit 10517,294857; mais dès que ce dernier chiffre est plus grand que 5, on le supprime, & on augmente le chiffre précédent d'une unité, & cela sans erreur sensible.

159. On déduit de l'observation précédente une méthode facile de faire ces sortes de multiplications de décimales, où l'on détermine la dénomination du produit : voici la regle générale. 1°. On pose le multiplicande à l'ordinaire. 2°. On renverse les chiffres du multiplicateur, observant d'écrire le chiffre des unités du multiplicateur sous le chiffre du multiplicande qui occupe le rang immédiatement d'un degré au dessous de la dénomination demandée; c'est-à-dire, que si on veut des cent milliemes au produit, on écrit le chiffre des unités du multiplicateur sous les millioniemes, celui des dixaines sous les dix millioniemes, celui des centaines à la droite du précédent, ainsi de suite, écrivant des zéros au dessus, s'il n'y a pas de décimales; & les décimales du multiplicateur s'écrivent dans l'ordre naturel, les dixiemes à gauche des unités, les centiemes à la gauche des dixiemes, &c. 3°. Chaque chiffre du multiplicateur commence à multiplier son chiffre correspondant du multiplicande, & le produit se met sous le chiffre des unités, & les autres produits à gauche, à l'ordinaire. Un exemple éclaircira cette méthode.

Proposons-nous de multiplier 37,721354 par 12,345, & de n'avoir au produit que des cent-milliemes; je les dispose comme on le voit au haut de la page suivante.

23,283	Multiplicande.
0,28	Multiplicateur.
186264	
46566	
6,51924	Preuve.

Il s'agit de démontrer que des cent milliemes divisés par des centiemes donnent pour quotient des milliemes.

DÉM. 1°. Si on divisoit des cent milliemes par des unités, on auroit des cent milliemes au quotient, car c'est partager ce nombre de cent milliemes en autant de parties égales qu'il y a d'unités abstraites dans le diviseur; ainsi les unités du quotient doivent être de même espece que celles du dividende, savoir des cent milliemes; mais ce n'est pas par des unités qu'on propose de diviser ces cent-milliemes, c'est par des centiemes d'unités ou par un diviseur cent fois plus petit que des unités; donc le quotient doit être cent fois plus grand; car en général, plus le diviseur est petit, plus le quotient est grand: or, un quotient cent fois plus grand que des cent-milliemes, est des milliemes; la virgule doit donc avoir trois chiffres à sa droite, au quotient. Par un semblable raisonnement, on prouvera que des centiemes divisés par des dixiemes donnent des dixiemes au quotient; que des milliemes divisés par des dixiemes donnent des centiemes; ainsi des autres: donc la regle générale est exacte. C. Q. F. D.

Autre Exemple.

Divid. 0,024144	4,024	Diviseur.	Milliemes.
0000	0,006	Quotient.	Milliemes.

3e *Exemple.*

Divid. 37,000000 } 0,045 Diviseur. Milliemes.
100 } 822,222 Quot. Milliemes.
100
100
100
100
10, reste qu'on néglige.

On voit dans ce troisieme exemple qu'on propose de diviser 37 entiers par 0,045 milliemes, & qu'on a écrit six zéros à la suite de 37, qui en sont séparés par une virgule; on a par là des millioniemes à diviser par des milliemes, ce qui donne des milliemes au quotient: donc en général, plus il y aura de décimales dans le dividende, & moins il y en aura dans le diviseur, plus le quotient sera exact. C. Q. F. B. R.

Quatrieme exemple. On propose de diviser 0,003569 par 27 entiers. Il est évident que le quotient sera des millioniemes, puisque c'est partager des millioniemes en 27 parties égales; d'ailleurs, en divisant un nombre quelconque par un nombre abstrait 27, les unités du quotient sont de même espece que celles du dividende, & par conséquent ici des millioniemes.

Divid. 0,003569 } 27 Diviseur.
086 } 0,000132 Millionieme, quot.
059
05 reste qu'on néglige.

Ces exemples suffisent pour qu'il ne reste plus de difficulté à placer la virgule où il convient. C. Q. F. B. R.

161. PROB. 1°. Approcher autant qu'on voudra du vrai quotient d'une division de fraction décimale ; 2°. trouver la valeur d'une fraction décimale quelconque.

SOLUTION. 1°. On écrira à la suite du dividende autant de zéros qu'il en faudra pour que les décimales du dividende excedent celles du diviseur, de la dénomination que l'on veut, c'est-à-dire que si l'on en veut approcher à un cent millieme près, il faut qu'il y ait 5 décimales de plus dans le dividende que dans le diviseur ; ce qui est évident, &c. C. Q. F. 1°. Dét.

2°. Il faut multiplier la fraction décimale regardée comme des entiers, par les parties de l'entier dont on parle, & diviser le produit par la dénomination : si ce sont des dixiemes, on divisera par 10 ; des centiemes, par 100 ; des milliemes, par 1000, &c. Ceci a déjà été enseigné (155). C. Q. F. 2°. Dét.

162. PROB. Changer les entiers & parties d'entiers en fractions décimales.

Regle générale. Il faut 1°. réduire les parties de l'entier en fractions ordinaires ; 2°. réduire ces fractions ordinaires en fractions décimales (149), & les écrire à la suite des entiers, en les séparant par une virgule : soit 1°. $13^{t}\ 1^{pi}\ 6^{po}$ à réduire en décimales ; j'observe que $1^{pi}\ 6^{po}$ est le $\frac{1}{4}$ de la toise ; mais $\frac{1}{4}=0,25$ (155) : donc $13^{t}\ 1^{pi}\ 6^{po}=13,25$.

Soit 2°. $8^{t}\ 9^{po}$ à changer en décimales ; j'observe que la toise vaut 72 pouces, & que 9 pouces en sont la huitieme partie : or $\frac{1}{8}=0,125$; ainsi $8^{t}\ 0^{pi}\ 9^{po}=8,125$.

3°. Si on propose de réduire en décimale $34^{tt}\ 1^{f}\ 4^{d}$, j'observe que 4 deniers valent $\frac{1}{60}$ de la li-

vre; $1^{f} = \frac{1}{20} = \frac{3}{60}$; j'ai donc $1^{f}\ 4^{d} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$: or $\frac{1}{15} = 0{,}06666$ &c : donc $34^{tt}\ 1^{f}\ 4^{d} = 34{,}066666$ &c.

On trouvera de même que $14^{lb}\ 7^{3} = 14\frac{7}{16} = 14{,}4375$; ainsi des autres. C. Q. F. Dét.

Le calcul des décimales est très-commode: on en fait un usage fréquent dans toutes les parties des Mathématiques; il est bon de se le rendre familier.

DE LA FORMATION
DES NOMBRES QUARRÉS
ET DE L'EXTRACTION DE LEURS RACINES.

163. DÉF. On a vu (55) que le *quarré* d'un nombre est le produit de ce nombre multiplié par lui-même, & que ce nombre en est la *racine*; 5 est la racine quarrée de $25 = 5 \times 5 = 5 . 5$; 6 est celle du quarré $36 = 6 \times 6 = 6 . 6$; 9 est celle du quarré $81 = 9 . 9$; 10 est la racine quarrée de $100 = 10 . 10$: ajoutons que tout nombre quarré composé de deux chiffres n'a qu'un seul chiffre pour racine, & que tout nombre composé de 3 chiffres a deux chiffres pour racine, puisque 100, qui est le plus petit nombre composé de 3 chiffres, a 10 pour racine; & que 9, qui est le plus grand nombre des dix caracteres de l'arithmétique, n'a pour son quarré 81 qu'un nombre composé de deux chiffres. C. Q. F. B. R.

164. On a vu (56) que le quarré d'un nombre composé de dixaines & d'unités, contient 1°. le quarré des unités qui occupe le rang des unités; 2°. le double des dixaines multiplié par les uni-

tés qui occupe le rang des dixaines ; 3°. le quarré des dixaines qui occupe le rang des centaines.

DÉM. En multipliant 64 par 64, ou 6 dixaines & 4 unités par 6 dixaines & 4 unités, les 4 unités du multiplicateur multiplient les 4 unités du multiplicande ; ce qui donne 1°. le quarré des unités qui occupe le rang des unités, parce que des unités multipliées par des unités donnent des unités ; le 4 multiplie auſſi les 6 dixaines du multiplicande, ce qui donne une fois le produit des dixaines par les unités ; les 6 dixaines du multiplicateur multiplient les 4 unités du multiplicande, ce qui donne un ſecond produit des dixaines par les unités ; ces 6 dixaines du multiplicateur multiplient auſſi les dixaines du multiplicande, ce qui donne le quarré des dixaines qui occupe le rang des centaines (56).

Le détail de l'opération ci-deſſus rend cette démonſtration ſenſible.

	64	Multiplicande.
	64	Multiplicateur.
	16	Produit de 4 × 4, quarré des unités.
2	4	Prod. des 4 unités du multiplicateur, par les 6 dixaines du multiplicande.
2	4	Prod. des 6 dixaines du multiplicateur, par les 4 unités du multiplicande.
36		Prod. des 6 dixaines du multiplicateur, par les 6 dixaines du multiplicande.
40	96	quarré de 64, ou de 6 dixaines & de 4 unités.

On trouvera de même, par la nature de la multiplication, qu'en général le quarré d'un nombre composé de pluſieurs chiffres, contient le quarré du premier, allant de gauche à droite, le

le double du premier par le second, le quarré du second; le double des 2 premiers par le 3e, le quarré du 3e; le double des 3 premiers multiplié par le 4e, le quarré du 4e; le double des 4 premiers multiplié par le 5e, le quarré du 5e; ainsi de suite. C. Q. F. B. R.

On trouve que le quarré de 243, nombre composé de 3 chiffres, contient:

243 . .

4 . . . . Quarré du premier chiffre 2.
16 . . . Double du premier multiplié par le second.
16 . . Quarré du second chiffre 4.
144 . Double des 2 premiers chiffres 24 multiplié par le 3e chiffre 3.
9 Quarré du 3e chiffre 3.

59049 Quarré de 243; ainsi des autres.

165. D'où il suit que dans le quarré 40/96 de 64, le premier chiffre 6, à droite, représente le quarré des unités; le précédent 9, le double des dixaines multiplié par les unités, & les chiffres précédens 40, le quarré des dixaines; c'est pourquoi si on sépare ces deux derniers chiffres 96 par un trait, les chiffres 40 qui précedent, contiennent le quarré des dixaines. En général, si dans ces chiffres qui précedent il y en a plus de 2, la racine aura plus d'un chiffre (163), on en séparera deux par un trait, ce qui précédera représentera de nouveau le quarré des dixaines; s'il y a encore plus de deux chiffres, on en séparera deux par un trait; ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux chiffres ou un seul à gauche du trait; le nombre quarré proposé étant sé-

paré de deux en deux chiffres allant de droite à gauche, il aura autant de chiffres à sa racine qu'il y a de tranches ; ainsi dans le quarré 40/96, il n'y a que deux tranches, aussi sa racine 64 ne contient que 2 chiffres. Si on proposoit de tirer la racine quarrée de 59049, ayant séparé ce nombre de deux en deux chiffres, allant de droite à gauche, on auroit 5/90/49 ; ce qui indiqueroit que sa racine seroit composée de 3 chiffres, parce qu'il y a trois tranches dans ce nombre ; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

166. THÉORÊME. Si un nombre excede un autre nombre d'une unité, le quarré du plus grand surpasse le quarré du plus petit, de 2 fois le petit nombre, plus une unité.

A démontrer que le quarré de $5=4+1$ surpasse le quarré de 4, de deux fois 4, plus une unité.

DÉM. On a $5\times5=(4+1)\times(4+1)$ ou $25=16+2\times4+1$; car si on multiplie $4+1$ par $4+1$ à l'ordinaire, comme on voit ci-dessous, le produit sera $16+2\times4+1=25$; & le quarré de 4 n'est que $16=4\times4$; il est donc évident que le quarré $16+2\times4+1=25$ surpasse le quarré 16 de deux fois le petit nombre 4, plus une unité.

$4+1 \quad = 5$	Multiplicande.
$4+1 \quad = 5$	Multiplicateur.
$16+1\times4$ . .	Prod. du 4 du multiplicateur, par le multiplicande $4+1$.
$+1\times4+1$	Prod. de l'unité du multiplicateur, par le multiplicande $4+1$.
$16+2\times4+1$	$=25$ .. quarré de $4+1$ ou de 5 ; ainsi des autres ; donc, &c. C. Q. F. Dét.

167. 1°. Si une ſomme eſt faite du quarré d'un nombre & du produit de ce nombre par un autre nombre quelconque, & qu'on ajoute à cette ſomme le quarré de la moitié de cet autre nombre quelconque, on aura un quarré parfait, dont la racine ſera le premier nombre plus la racine du quarré ajouté.

2°. Si à la différence du quarré d'un nombre au produit de ce nombre par un autre nombre quelconque, on ajoute le quarré de la moitié de cet autre nombre, on aura auſſi un quarré exact, dont la racine ſera la différence du premier nombre à la racine du quarré ajouté.

DÉM. Soit la ſomme $4\times4+6\times4$; ſi on ajoute à cette ſomme le quarré $3\times3=9$ de la moitié 3 du produiſant 6 du terme 6×4, on aura $4\times4+6\times4+9=49$, quarré parfait, dont la racine 7 eſt égale au premier nombre 4, racine du quarré 4×4 plus à la racine 3 du quarré ajouté 9. C'eſt une ſuite évidente de la formation du quarré d'un binome ; car on n'a fait que completer les différens produits que renferme ce quarré. Auſſi en faiſant la multiplication on aura

$4+3= \ldots\ldots\ldots 7$
$4+3= \ldots\ldots\ldots 7$

$4\times4+4\times3$
$\quad +4\times3+3\times3$

$4\times4+6\times4+3\times3=49$, quarré exact. C. Q. F. 1°. D.

2°. Si on a $5\times5-4\times5$, & qu'on ajoute $2\times2=4$, quarré de la moitié 2 du produiſant 4 du terme -4×5, on aura $5\times5-4\times5+2\times2=9$, quarré exact, dont la racine $3=5-2$; or

5—2 est la différence de la racine 5 du premier nombre à la racine 2 du quarré ajouté 2 × 2=4. Il en est de même de tout autre exemple : à l'aide de cette proposition on peut résoudre les problêmes du second degré. C. Q. F. 2°. D. & B. R.

168. On déduit des principes précédens la méthode de tirer la racine quarrée d'un nombre quelconque : avant d'établir la regle générale, il est bon, pour en faciliter la pratique, de savoir par mémoire les quarrés & les cubes des nombres naturels jusqu'à 10 : on les a insérés dans la table suivante.

[Ra]cines.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
[Qu]arrés.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

On voit dans cette table que le quarré de 2 est 4, son cube 8 ; que le quarré de 5 est 25, son cube 125 ; que le quarré de 9 est 81, son cube 729 ; ainsi des autres.

169. PROB. Tirer la racine quarrée d'un nombre entier quelconque.

Regle générale. Il faut 1°. séparer les chiffres de deux en deux, allant de droite à gauche (165); 2°. on mettra au quotient la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche ; on ôtera ce plus grand quarré de cette premiere tranche ; on écrira au-dessous le reste, & à sa suite la tranche suivante : on regardera ce nombre comme un dividende, on le divisera par le double du chiffre qu'on a écrit pour racine, qui représente des dixaines ; on écrira ce

diviseur sous ce dividende au rang des dixaines, c'est-à-dire, en laissant un chiffre sur la droite (parce que ce premier chiffre de la racine est des dixaines par rapport au chiffre qu'on cherche); 3°. on examinera combien ce double de dixaines est contenu de fois dans les chiffres correspondans de ce dividende; on écrira ce nombre au quotient pour le second chiffre de la racine; on l'écrira aussi, à la suite du diviseur, sous le chiffre qu'on a laissé sur la droite; on multipliera ce diviseur ainsi augmenté, par le chiffre qu'on a mis au quotient; on fera la soustraction à chaque produit particulier, comme dans la division ordinaire; on écrira le reste au-dessous, & à la suite la tranche suivante; on regardera ce nombre comme un nouveau dividende; 4°. on doublera les deux chiffres de la racine qui représentent des dixaines; on aura un nouveau diviseur, qu'on écrira sous ce nouveau dividende, en laissant un chiffre sur la droite; on examinera combien de fois ce diviseur est contenu dans les chiffres correspondans du dividende; on écrira ce nombre pour 3e chiffre de la racine, & à la suite du diviseur, & on agira comme ci-dessus; ainsi de suite, jusqu'à la derniere tranche: si à la fin de la derniere opération il ne reste rien, le nombre proposé est un quarré parfait, s'il y a un reste, le nombre proposé est nommé quarré imparfait. On peut dans ce cas suivre l'opération aussi loin qu'on voudra, en écrivant à la suite du reste deux zéros; le chiffre qu'on trouvera pour racine représentera des dixiemes d'unité, car écrire deux zéros à la suite d'un nombre, c'est le multiplier par 100, dont la racine est 10: donc le chiffre qu'on trouve est dix fois trop

grand; il faut donc le mettre au rang des dixiemes pour le réduire à sa juste valeur. Il y aura toujours un nouveau reste, autrement le quarré d'un nombre complexe donneroit un nombre entier, ce qui est impossible (132 & 133) : si on ajoute à ce nouveau reste deux zéros, & qu'on suive le même procédé, on aura des centiemes à la racine ; ainsi de suite à l'infini : c'est ce qu'on appelle *l'approximation des racines*, &c.

170. *Démonstration de la regle générale qu'on vient d'établir.*

DÉM. Par la formation (165), le quarré 40/96, étant séparé de deux en deux chiffres, contient dans sa premiere tranche 40, le quarré des dixaines avec un reste, qui, suivi du premier chiffre 9 de la tranche suivante, contient le double des dixaines multiplié par les unités qu'on cherche, avec un reste, qui, suivi du second chiffre 6 de cette tranche, contient le quarré des unités; il est donc clair qu'ayant mis la racine 6 du plus grand quarré 36, contenu dans 40, au quotient, ôté ce quarré 36 de 40, & descendu la tranche suivante 96 à la suite du reste 4, on aura un nombre 496, dont les deux premiers chiffres à gauche 49, contiennent le double des 6 dixaines qu'on a écrit au quotient, multiplié par les unités qu'on cherche ; il faut donc, pour trouver ces unités, diviser 49 par le double 12 de la racine 6 ; le quotient 4 est les unités qu'on cherche ; il faut donc les écrire à la racine & à la suite du diviseur, sous les unités du dividende, & multiplier ce diviseur ainsi augmenté, par ce chiffre 4 qu'on vient d'écrire au quotient, pour avoir au produit le double des dixaines multiplié par les unités & le quarré des unités, qu'il faut ôter de

496, qui contient ces deux produits. Comme il ne reste rien, le nombre 4096 est un quarré parfait, dont la racine est 64. La regle générale est donc exacte. C. Q. F. D.

On voit ci-dessous l'opération détaillée.

Nombre proposé	40/96	64	Racine.
Reste	496		
Diviseur	124		
	000		

171. *Procédé.* Je sépare les chiffres de deux en deux; & je dis: le plus grand quarré contenu dans 40 est 36; je pose sa racine 6 au quotient; j'ôte 36 de 40, il reste 4; j'écris à sa suite 96; j'ai un dividende 496, & pour diviseur 12, double de la racine 6, que j'écris sous 49, laissant un chiffre à la droite; je trouve que ce diviseur est contenu 4 fois dans les chiffres correspondans 49 du dividende; j'écris 4 pour second chiffre de la racine, & sous le 6; je dis: 4 fois 4 font 16, ôtés de 16, il reste zéro; 4 fois 2 font 8, & un de retenu font 9, qui ôtés de 9, il reste zéro; 4 fois 1 font 4, qui ôtés de 4, il reste zéro. La racine est donc 64. La preuve se fait en multipliant la racine par elle-même, & en ajoutant au produit le reste, s'il y en a; on doit trouver le nombre proposé. En effet ici $64 \times 64 = 4096$.

172. THÉOR. Si on multiplie un nombre quarré quelconque par un autre nombre quarré, le produit est un quarré, qui a pour racine le produit des racines des quarrés qui se font multipliés: ou, la racine du premier quarré est rendue autant de fois plus grande qu'il y a d'unités dans la racine du quarré qui multiplie.

DÉM. Si on multiplie le quarré $8 \times 8 = 64$ par le quarré $10 \times 10 = 100$, on aura pour produit $8 \times 8 \times 10 \times 10 = 6400$, qui est visiblement un quarré parfait, dont la racine 8×10 est le produit des racines 8 & 10 des deux quarrés 8×8 & 10×10, qui se sont multipliés: donc quand on multiplie un quarré quelconque $8 \times 8 = 64$ par un quarré $10 \times 10 = 100$, on rend dans cet exemple la racine 8 du premier quarré dix fois plus grande, ou dix fois trop grande; en effet la racine quarrée du produit $8 \times 8 \times 10 \times 10 = 6400$, est $80 = 8 \times 10$: donc, &c. C. Q. F. D. & B. R.

173. Tirer la racine quarrée du nombre 87646,

	8/76/46	296,05 Racine.
Premier reste.	4 76	
1er diviseur..	49	
2e reste.....	35 46	ou nouveau dividende.
2e diviseur..	5 86	
	30	reste.
	3000	reste à la suite duquel on a écrit deux zéros.
	5920	diviseur.
	3000000	dividende.
	59205	diviseur.
	03975	reste qu'on néglige.

SOLUTION. Ayant séparé les chiffres de deux en deux (165), j'observe que le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche 8 est 4, dont la racine est 2; j'écris donc 2 à la racine, j'ôte son quarré 4 de 8, il reste 4; j'écris à la suite la tranche suivante 76; j'ai pour dividende

476, dont les deux premiers chiffres contiennent (165) le double des deux dixaines que j'ai écrit au quotient, multiplié par les unités qu'on cherche; ainsi en divisant 47 par le double 4 de ces 2 dixaines, on aura 9 unités pour le second chiffre de la racine; on pose donc 9 à la racine, & à la suite du diviseur 4 sous le 6, & on agit comme dans la division ordinaire, en multipliant le diviseur 49 par le dernier chiffre 9 de la racine; ôtant les produits particuliers des chiffres correspondans du dividende 476, on écrit à la suite du reste 35 la derniere tranche 46; on a pour nouveau dividende 3546; on double la racine 29, considérée comme des dixaines; on a 58, qu'on écrit au rang des dixaines sous le dividende, en laissant un chiffre sur la droite: on examine combien ce nouveau diviseur 58 est contenu de fois dans les chiffres correspondans du dividende 3546: on trouve 6 fois: on écrit 6 à la racine & à la suite du diviseur 58; on multiplie ce nouveau diviseur 586 par ce chiffre 6, qu'on vient d'écrire à la racine; on ôte les produits particuliers des chiffres correspondans du dividende 3546; on a 30 de reste, & la regle est achevée.

Si on ne veut pas négliger le reste 30, on écrit à la suite deux zéros, on a 3000, qu'on regarde comme un nouveau dividende: on divise les chiffres qui précedent le dernier zéro par le double 592 de la racine 296; le quotient est zéro, qu'on écrit à la racine au rang des dixiemes (parce qu'en écrivant deux zéros à la suite d'un nombre, c'est le multiplier par 100. On rend donc la racine dix fois trop grande (171); c'est pourquoi on l'écrit au rang des dixiemes, pour

DÉM. Si on … écrit aussi à la suit … par le quarré … ant multiplié … produit 8 × … il reste … blement un … a p… est le prod… rés 8 × … donc q… 8 × 8 … & à la … rend … 5 : on le multiplie … qu… …ient d'écrire à la racine ; on … … particuliers des chiffres correspon… dividende ; on a pour reste 3975, qu'on …glige, parce que ce reste 3975 ne peut augmenter la racine 296,05 d'un centieme de l'unité dont on parle. Car si cela étoit, il faudroit que ce reste 3975 fût égal au double de la racine 296,05 plus à une unité (166). La racine quarrée du nombre proposé 87646 est donc 296,05 avec un reste qui ne vaut pas un centieme de l'unité. On pourroit poursuivre l'opération aussi loin qu'on voudroit, en ajoutant à chaque reste deux zéros ; on auroit par ce moyen des milliemes, des dix milliemes, des cent milliemes, &c. à la racine. Cet exemple suffit. C. Q. F. Dét.

174. Tirer la racine quarrée d'une fraction ordinaire.

Regle générale. 1°. Si les termes de la fraction sont des quarrés parfaits, on tirera la racine quarrée du numérateur & celle du dénominateur ; elles formeront une nouvelle fraction, qui sera la racine quarrée de la fraction proposée ; ainsi la racine quarrée de la fraction $\frac{25}{36}$ est $\frac{5}{6}$, puisque $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$; de même la racine quarrée de $\frac{9}{49}$ est $\frac{3}{7}$; car $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$: donc, &c. C. Q. F. 1°. Dét.

la réduire à sa valeur); on l'écrit aussi à la suite du diviseur, on a 5920, qui étant multiplié par 0, donne 0, qui ôté de 3000, il reste 3000; à la suite on écrit deux zéros, on a pour nouveau dividende 300000: on divise les chiffres qui précedent le dernier zéro par le double 5920 de la racine 296,0; le quotient est 5, on l'écrit à la racine au rang des centiemes & à la suite du diviseur 5920; on a 59205: on le multiplie par ce chiffre 5, qu'on vient d'écrire à la racine; on ôte les produits particuliers des chiffres correspondans du dividende; on a pour reste 3975, qu'on néglige, parce que ce reste 3975 ne peut augmenter la racine 296,05 d'un centieme de l'unité dont on parle. Car si cela étoit, il faudroit que ce reste 3975 fût égal au double de la racine 296,05 plus à une unité (166). La racine quarrée du nombre proposé 87646 est donc 296,05 avec un reste qui ne vaut pas un centieme de l'unité. On pourroit poursuivre l'opération aussi loin qu'on voudroit, en ajoutant à chaque reste deux zéros; on auroit par ce moyen des milliemes, des dix milliemes, des cent milliemes, &c. à la racine. Cet exemple suffit. C. Q. F. Dét.

174. Tirer la racine quarrée d'une fraction ordinaire.

Regle générale. 1°. Si les termes de la fraction sont des quarrés parfaits, on tirera la racine quarrée du numérateur & celle du dénominateur; elles formeront une nouvelle fraction, qui sera la racine quarrée de la fraction proposée; ainsi la racine quarrée de la fraction $\frac{25}{36}$ est $\frac{5}{6}$, puisque $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$; de même la racine quarrée de $\frac{9}{49}$ est $\frac{3}{7}$; car $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$: donc, &c. C. Q. F. 1°. Dét.

2°. Si les termes de la fraction ne sont pas des nombres quarrés, il faut réduire la fraction proposée en fraction décimale d'un nombre pair de chiffres décimaux, & tirer la racine quarrée à l'ordinaire (169).

Soit la fraction $\frac{5}{8}$, dont on veut la racine à un millieme près, je la change en fraction décimale (149). On aura $\frac{5}{8}$=0,625000, dont on tirera la racine à l'ordinaire, comme dans le problême précédent (173).

0,62/50/00	0,790 Racine.		
1350 . .	reste, dividende.		
149 . .	diviseur.		
0.0900	2e reste : nouveau dividende.		0,790
			0,790
1580	2e diviseur.		71100 .
900	reste qu'on néglige.		5530
			900
		Preuve.	625000

La racine quarrée de 0,625000, ou de la fraction $\frac{5}{8}$, est donc 0,790 avec un reste 900, qui ne peut augmenter la racine d'un millieme d'unité, parce qu'il faudroit (166), que ce reste 900 fût égal au double de la racine 790 plus l'unité ; la preuve est qu'en multipliant 0,790 par 0,790, & ajoutant le reste 900, on trouve le nombre proposé 0,625000 ; ainsi des autres. C. Q. F. Dét.

175. *Autre méthode de tirer la racine quarrée d'un nombre quelconque, simple ou complexe.*

Regle générale. 1°. On sépare les entiers de deux en deux, de droite à gauche, à l'ordinaire ; 2°. on pose au quotient la racine quarrée du

plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche ; on ôte son quarré de cette premiere tranche ; on écrit à la suite du reste le premier chiffre de la tranche suivante ; on regarde ce nombre comme un dividende qu'on divise par le double de la racine, considérée comme des dixaines ; le quotient donne le second chiffre de la racine ; on fait le quarré des chiffres de la racine ; on l'ôte des deux premieres tranches à gauche ; on écrit à la suite du reste le premier chiffre de la 3e tranche ; on a un nouveau dividende, qu'on divise par le double des chiffres du quotient ; on a le 3e chiffre de la racine ; on fait le quarré des trois chiffres de la racine trouvée ; on ôte ce quarré des 3 premieres tranches ; on a un reste ; on écrit à sa suite le premier chiffre de la tranche suivante, & on suit le même procédé jusqu'à la fin de l'opération. Cette méthode porte sa preuve avec elle.

Si le nombre proposé est complexe, on réduit le dernier reste en sous-especes ; on y ajoute celles qu'on a ; on regarde ce nombre comme un dividende, qu'on divise par le double de toute la racine trouvée, on a à la racine des sous-especes ; on fait le quarré de toute la racine, qu'on ôte de tout le nombre complexe proposé ; si on a un reste, on le réduit en sous-especes d'un degré plus petit que les précédentes ; on les divise par le double de toute la racine trouvée, on a des sous-especes du degré auquel on a réduit le reste, & on suit le même procédé de sous-especes en sous-especes aussi loin qu'on veut. Appliquons cette méthode à un exemple.

176. PROB. Tirer la racine quarrée de 1173^{tt} 0^{tpi} 4^{tpo} 6^{lis} ; j'écris :

$11/73^{tt}\ 0^{tpi}\ 4^{tpo}\ 6^{lig}$ } $34^{t}\ 1^{pi}\ 6^{po}$ racine.

27 dividende.
6 diviseur.

1156

$17^{tt}\ 0^{tpi}$ 2e reste que je réduis en toises pieds.

102^{tpi}
68^{t} 2e diviseur.
$1167^{tt}\ 2^{tpi}\ 2^{tpo}$

$5^{tt}\ 4^{tpi}\ 2^{tpo}\ 6^{lig}$ 3e reste que je réduis en ses pouces.

410^{tpo}
$68^{t}\ 2^{pi}$
$1173^{tt}\ 0^{tpi}\ 4^{tpo}\ 6^{lig}$

0000 0 0 0

$34 \times 34 = 1156$
$(34^{t}\ 1^{pi}) \times (34^{t}\ 1^{pi}) = 1167^{tt}\ 2^{tpi}\ 2^{tpo}$

$34^{t}\ 1^{pi}\ 6^{po}$
$34^{t}\ 1^{pi}\ 6^{po}$

136
102
. 8 3 4 . 6
8 3

$1173^{tt}\ 0^{tpi}\ 4^{tpo}\ 6^{lig}$

Procédé. Je vois que le plus grand quarré contenu dans 11 est 9, je pose sa racine 3 au quotient; j'ôte ce quarré 9 de 11, il reste 2: j'écris à sa suite le premier chiffre 7 de la seconde tranche, j'ai un dividende que je divise par 6, double des dixaines 3 de la racine; je trouve 4 pour second chiffre de la racine, je fais le quarré de toute la racine trouvée 34, j'ai 1156, que j'ôte du nombre proposé; il reste $17^{tt}\ 0^{tpi}$, [illegible]

je réduis en toises-pieds, en les multipliant par 6, j'ai 102^{tpi}, que je divise par 68, double de la racine trouvée, 34^{t}; j'ai 1 pied, que j'écris à la suite de la racine 34^{t}; je fais le quarré de 34^{t} 1 pied; j'ai 1167^{tt} 2^{tpi} 2^{tpo}, que j'ôte du nombre proposé 1173^{tt} 0^{tpi} 4^{tpo} 6^{tlig}. Il reste 5^{tt} 4^{tpi} 2^{tpo} 6^{tlig}, que je réduis en toises-pouces, j'ai 410^{tpo}, que je divise par 68^{t} 2^{pi}, double de la racine 34^{t} 1^{pi}; je trouve 6^{po} au quotient, que j'écris à la suite de la racine; j'ai pour racine 34^{t} 1^{pi} 6^{po}, dont je fais le quarré; j'ai 1173^{tt} 0^{tpi} 4^{tpo} 6^{tlig}; que j'ôte du nombre proposé, il ne reste rien. La regle est achevée & prouvée; ainsi des autres.

177. **Prob.** Tirer la racine quarrée d'un nombre complexe quelconque, en suivant la premiere méthode. Soit 154^{tt} 5^{tpi} 2^{tpo} 2^{tlig} 8^{tpts}, dont on demande la racine quarrée.

	$1/54^{tt}$ 5^{tpi} 2^{tpo} 2^{tlig} 8^{tpts}	12^{t} 2^{pi} 8^{po} racine.
Dividend.	0 54	
Diviseur.	22	
Reste.	10^{tt} 5^{tpi} 2^{tpo} 2^{tlig} 8^{tpts}	à réduire en toises pieds; on a 65^{tpi} pour dividende.
Dividende.	65^{tpi}	
Diviseur.	24^{t} 2^{pi}	
	2^{pi} multiplicateur.	
Prod.	8^{tt} 0^{tpi} 8^{tpo}	à ôter du reste complexe.
2e reste.	2^{tt} 4^{tpi} 6^{tpo} 2^{tlig} 8^{tpts},	à réduire en toises pouces.
Dividende.	198^{tpo}	
Diviseur.	24^{t} 4^{pi} 8^{po}	
	8^{po} multiplicateur.	
Prod.	2^{tt} 4^{tpi} 6^{tpo} 2^{tlig} 8^{tpts}	à ôter du 2e reste;

le résultat est 0 0 0 0 0 zéro, & la regle est achevée. Ainsi des autres.

On voit par l'exposé de cette opération, que lorsqu'on est arrivé aux sous-especes, on écrit à la suite du diviseur (double de la racine trouvée), le chiffre des sous-especes qu'on a mis à la racine, & qu'on multiplie ce diviseur ainsi augmenté par ce chiffre des sous-especes; on a un produit qu'on ôte d'un premier reste; on a un reste complexe, qu'on réduit en sous-especes d'un degré plus petit, ici en toises-pouces; on a 198^{tpo}, qu'on a à diviser par le double 24^{t} 4^{pi} de la racine; on a trouvé 8^{po}, qu'on a écrit à la racine au rang des pouces, & à la suite du diviseur; on a eu 24^{t} 4^{pi} 8^{po}, qu'on a multiplié par 8 pouces; on a ôté le produit 2^{tt} 4^{tpi} 6^{tpo} 2^{tlig} 8^{tpts} du second reste, le résultat est zéro. La regle est achevée; & le reste zéro indique que le nombre complexe proposé est un quarré parfait, dont la racine est 12^{t} 2^{pi} 8^{po}. Ces deux exemples font voir qu'il n'est pas nécessaire de réduire un nombre complexe à sa plus petite espece pour en tirer la racine quarrée. C. Q. F. B. R.

178. REMARQUE. L'extraction de la racine quarrée est d'un usage très-étendu. On s'en sert dans toutes les parties des Mathématiques, surtout dans la Géométrie, dans la solution d'une infinité de problêmes; & même à la Guerre, pour disposer un corps de troupes en bataillon quarré, à centre plein, à centre vuide. Tout Officier qui veut savoir à fond l'Art Militaire, doit se la rendre familiere: en effet, il peut arriver mille occasions à la guerre où il seroit important de disposer un corps de troupes en bataillon quarré, à centre plein ou à centre vuide: dans le premier cas, pour présenter une masse d'hommes impénétrable, ou capable d'une

impulsion considérable, soit pour forcer un front de troupes sur 3 de hauteur, ou des retranchemens; dans le second cas, pour présenter un plus grand front à l'ennemi, renfermer dans l'intérieur les équipages & paroître plus nombreux. Appliquons ceci aux problêmes suivans.

Pl. 1, fig. 6. 179. PROB. Faire avec un corps de 1379 hommes un bataillon quarré à centre vuide, en sorte que ce vuide soit un quarré dont le front puisse contenir 60 hommes; déterminer le front du bataillon & sa hauteur.

SOLUTION. Il faut ajouter au nombre de la troupe 1379[h] le quarré 3600, du front 60 du vuide, & tirer la racine quarrée de la somme 4979: elle exprimera le front du bataillon; cette racine est 70 avec un reste 79, ce qui indique que le front du bataillon sera de 70 hommes. Si de ce front 70 on ôte celui du vuide 60, on aura 10, dont la moitié 5 marquera la hauteur du bataillon. Il reste 79 hommes, dont on peut faire 4 pelotons pour renforcer les angles. On peut les disposer, comme l'indique *la figure* 6, au moment du choc de la cavalerie. L'expérience fait connoître qu'une bonne infanterie, en bataillon quarré à 3 de hauteur, peut résister au choc de la cavalerie; qu'à 4 de hauteur, elle a de l'avantage sur la cavalerie; & qu'à 5 & à 6 de hauteur, elle est impénétrable à tous les efforts de la cavalerie. Dans cet exemple elle sera à 5 de hauteur. C. Q. F. Dét.

180. PROB. Avec 1639 hommes faire un bataillon quarré de 100 hommes de front; déterminer le front du vuide & la hauteur du bataillon.

SOLUTION. J'observe que le quarré 10000 du front 100 hommes, contient 1639 plus le quarré vuide,

vuide, que j'exprime par xx; j'ai donc cette équation $10000 = 1639 + xx$; j'ôte 1639 de part & d'autre, il reste $8361 = xx$; tirant la racine quarrée, j'ai le front du vuide $x = 91$ avec un reste 80; mais comme il faut que ce vuide 8361 soit un quarré parfait, je lui ajoute le double de la racine 91, plus l'unité, moins le reste 80, savoir, 103^h, que j'ôte de la troupe 1639; il reste 1536 hommes; j'ai donc pour le vuide, le quarré parfait 8464 (166), dont la racine 92 est le front du vuide, que j'ôte du front 100, il reste 8, dont la moitié 4 est la hauteur du bataillon. La preuve est que $92 \times 92 + 1536 = 10000$, quarré de 100, front du bataillon. Les 103 hommes qu'on a ôté de la troupe, se divisent en 4 pelotons, que l'on place en avant des angles, comme l'indique *la figure 6*. Le prolongement des côtés du quarré désigne la direction des feux de chaque front. C. Q. F. Dét.

181. PROB. Avec 1875 hommes faire un bataillon quarré à centre vuide, à 4 hommes de hauteur; quel est le front du bataillon & celui du quarré vuide?

SOLUTION. Si on connoissoit le front du vuide, en lui ajoutant le double de la hauteur du front, on auroit le front du bataillon. Ainsi si x exprime le front du vuide, celui du bataillon sera $x + 8$, dont le quarré est $xx + 16x + 64$; or ce quarré égale le vuide xx plus 1875^h. On a donc cette équation $xx + 16x + 64 = xx + 1875$, ou effaçant les quantités qui se détruisent, & ôtant de part & d'autre 64, on a $16x = 1811$; divisant par 16, on a $x = 113$, avec un reste 3, qu'on néglige. Le vuide est donc un quarré capable de contenir 113^h de front; il faut

donc que 113 × 113 + 1875 = 14644 soit un quarré dont la racine égale 113 + 8 = 121 & 3 de reste, c'est-à-dire, que le front du bataillon doit être de 121ʰ & 3 hommes de reste; en effet, la racine quarrée de 14644 est 121 & 3 de reste; donc, &c. C. Q. F. Dét.

DE L'EXTRACTION

DE LA RACINE CUBE.

182. DÉF. ON a vu (55) que le cube d'un nombre est le résultat de ce nombre multiplié successivement deux fois par lui-même, ou, ce qui revient au même, que le cube d'un nombre est le produit de son quarré multiplié par ce nombre; & que ce nombre en est la *racine cube*; ainsi 4 est la racine cube de 64 = 4 × 4 × 4; 6, celle de 216 = 6 × 6 × 6; 9, celle de 729 = 9 × 9 × 9, & 10 est la racine cube de 1000 = 10 × 10 × 10; ce qui fait voir, 1°. que tout nombre cube, qui n'est composé que de 3 chiffres, n'a qu'un chiffre à sa racine, puisque le plus grand chiffre 9 n'a pour son cube 729, qu'un nombre composé de 3 chiffres; 2°. que tout nombre cube, qui est composé de 4 chiffres, ou de plus de 4 chiffres, a plus d'un chiffre à sa racine, puisque 1000, qui est le plus petit nombre de 4 chiffres, a deux chiffres à sa racine 10. C.Q.F.B.R.

183. On a vu (57) que le cube d'un nombre composé de dixaines & d'unités contient, 1°. le cube des dixaines qui occupe le rang des mille (parce que le cube de 10 est mille); 2°. trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, qui occupe le rang des centaines; 3°. trois

fois les dixaines multipliées par le quarré des unités, qui occupent le rang des dixaines; 4°. le cube des unités, qui occupe le rang des unités. On peut donc dire, quand on voit un nombre cube composé de plusieurs chiffres, 1°. que le premier chiffre à droite représente le cube des unités; 2°. que le second chiffre, allant de droite à gauche, représente le quarré des unités multiplié par le triple des dixaines; 3°. que le 3e représente 3 fois le quarré des dixaines multiplié par les unités; 4°. que ce qui précede représente le cube des dixaines; ainsi qu'en séparant par tranche les chiffres de trois en trois, allant de droite à gauche, on aura autant de chiffres à la racine qu'il y aura de tranches, dont la premiere à gauche peut n'avoir qu'un, ou deux, ou trois chiffres au plus; ceci observé, il faut apprendre par mémoire la table des cubes des nombres naturels qu'on a donnée avec celle des quarrés n°. 168.

183A. Le cube d'une ligne AB, divisée en 2 parties inégales A*b*, *b'*B, contient, 1°. le cube de la premiere partie A*b*, représenté par A*bcanmod*; 2°. trois fois le quarré de la premiere partie A*b*, multiplié par la seconde partie *b*B, savoir, *c'd'o'b'*B; *c''a'n'd''*D; *d'''o''m'n''*EP; 3°. trois fois le quarré de la seconde partie *b'*B, multiplié par la premiere A*b*, savoir *dc*C; *d''''n'''*E'NH, *o'''d'''*O; 4°. le cube de la seconde partie *b'*B = H'M, savoir, H'MIXV. Pl. I, fig. 2 & 3.

184. *Principe.* Le cube d'un nombre composé de plusieurs chiffres contient, 1°. le cube du premier chiffre à gauche, plus trois fois le quarré du premier multiplié par le second chiffre, plus 3 fois le premier multiplié par le quarré du second, plus le cube du second;

2°. trois fois le quarré des deux premiers chiffres multiplié par le troisieme, plus trois fois les 2 premiers chiffres multipliés par le quarré du 3e, plus le cube du 3e; 3°. trois fois le quarré des 3 premiers chiffres multiplié par le 4e; plus 3 fois les 3 premiers chiffres multipliés par le quarré du 4e; plus le cube du quatrieme; ainsi de suite pour un plus grand nombre de chiffres; ce qui se prouve par la formation : chaque produit avance d'un rang vers la droite.

Proposons-nous de faire le cube de 456 selon ce principe; on aura.

456		
64.	=	$4 \times 4 \times 4$, cube du 1er chiffre 4.
240. . . .	=	$3 \times 4 \times 4 \times 5$, triple du quarré du 1er multiplié par le 2e, 5.
300. . .	=	$3 \times 4 \times 5 \times 5$, tripledu 1er chiffre multiplié par le quarré du 2e, 5.
125. . .	=	$5 \times 5 \times 5$, cube du second chiffre 5.
36450. .	=	$3 \times 45 \times 45 \times 6$, triple du qu. des 2 1ers 45, par le 3e chiffre 6.
4860.	=	$3 \times 45 \times 6 \times 6$, triple des 2 1ers chiffres mul. par le qu. du 3e, 6.
216	=	$6 \times 6 \times 6$ cube du 3e chiffre 6.
94818816		Cube de 456.

185. THÉOR. Si deux nombres ne different entr'eux que d'une unité, le cube du plus grand surpasse le cube du petit de 3 fois le quarré du petit, plus 3 fois le petit, plus une unité.

DÉM. Soient les nombres 4 & 5, qui se surpassent d'une unité, le cube de 4 est $4 \times 4 \times 4 = 64$.

Le cube de $5 = 4 + 1$ est $(4 + 1) \times (4 + 1)$

$\times (4+1) = 4 \times 4 \times 4 + 3 \times 4 \times 4 \times 1 + 3 \times 4 \times 1 \times 1 + 1 = 125$, résultat des multiplications indiquées. Or 125 surpasse 64 de 61, & $61 = 3 \times 4 \times 4 \times 1 + 3 \times 4 \times 1 \times 1 + 1 = 48 + 12 + 1$; cet excès $48 + 12 + 1$ contient 3 fois le quarré du petit nombre 4, savoir, 48, plus 3 fois 4 ou 12, plus l'unité : donc, &c. C. Q. F. Dét.

Donc si au cube d'un nombre on ajoute 3 fois le quarré de sa racine, plus 3 fois sa racine, plus l'unité, on aura un nombre cube, dont la racine sera d'une unité plus grande que celle du premier cube.

186. THÉOR. Le produit de deux cubes est un cube qui a pour racine le produit des racines de ces deux cubes; & en général les mêmes puissances de deux nombres, en se multipliant, donnent une puissance du même degré, qui a pour racine le produit des racines de ces deux puissances.

DÉM. Le cube de 3 est $3 \times 3 \times 3 = 27$; celui de 4 est $4 \times 4 \times 4 = 64$, le produit de ces cubes est $3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 3 \times 4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 4 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$; or 12, racine cube de 1728, est le produit des racines 3 & 4 des cubes 27 & 64 qui, en se multipliant, ont produit le cube 1728; il en est de même de toute autre puissance de deux nombres : donc, &c. C. Q. F. Dét.

186A. PROB. Tirer la racine cube d'un nombre entier quelconque.

Regle générale. Il faut, 1°. séparer les chiffres de 3 en 3, allant de droite à gauche; on aura autant de chiffres à la racine qu'il y aura de tranches (183); 2°. on mettra au quotient la racine du plus grand cube contenu dans la pre-

miere tranche à gauche; cette racine représente des dixaines ; on ôtera son cube de cette premiere tranche; on écrira à la suite du reste le premier chiffre de la seconde tranche; on aura un nombre qui est formé du triple du quarré de la racine trouvée, multiplié par les unités qu'on cherche (183); on regardera ce nombre comme un dividende, qu'on divisera par 3 fois le quarré de la racine trouvée ; on écrira pour second chiffre de la racine le nombre de fois que ce diviseur est contenu dans ce dividende, observant, 1°. que ce qui restera suivi du second chiffre de la tranche contienne le triple du quarré du chiffre qu'on met au quotient multiplié par le chiffre précédent de la racine; 2°. & que ce qui restera suivi du 3e chiffre de la tranche contienne au moins le cube du chiffre qu'on écrit au quotient; il faut aussi prévoir que ce qui restera après cette derniere soustraction, n'excede pas trois fois le quarré de la racine trouvée, plus 3 fois cette racine, plus l'unité ; autrement le chiffre qu'on auroit mis à la racine seroit trop petit au moins d'une unité (185): 3°. ces choses prévues, on fera le cube des deux chiffres de la racine; on l'ôtera des 2 premieres tranches à gauche du nombre proposé; on écrira à la suite du reste le premier chiffre de la troisieme tranche ; on regardera ce nombre comme un dividende ; on le divisera par 3 fois le quarré de toute la racine trouvée; on écrira le quotient pour 3e chiffre de la racine, prévoyant, comme ci-dessus, que ce qui reste, suivi du second chiffre de la 3e tranche, contienne 3 fois le quarré du chiffre qu'on met au quotient, multiplié par les chiffres précédens de la racine, & que ce qui restera suivi

du 3e chiffre de cette troisieme tranche, contienne au moins le cube du chiffre qu'on a écrit à la racine, & enfin qu'après cette derniere soustraction, le reste n'excede pas 3 fois le quarré de toute la racine, plus 3 fois toute la racine, plus l'unité; car dans ce cas ce 3e chiffre de la racine feroit trop petit au moins d'une unité (185). Ce 3e chiffre trouvé, on fera le cube de toute la racine; on l'ôtera des 3 premieres tranches à gauche: on écrira à la suite du reste le 1er chiffre de la 4e tranche: on divisera ce nombre par 3 fois le quarré de la racine trouvée, le quotient sera le 4e chiffre de la racine: on fera le cube de toute la racine trouvée: on l'ôtera des 4 premieres tranches à gauche: on écrira à la suite du reste le 1er chiffre de la 5e tranche, & on suivra le même procédé jusqu'à la fin. Si le nombre proposé est un cube parfait, il ne restera rien, si-non il y aura un reste; si on ne veut pas le négliger & approcher plus près de la racine, au moyen des décimales, on écrira à la suite du reste trois zéros: on continuera l'extraction de la racine; on trouvera un nouveau reste, auquel, ajoutant de même trois zéros, on suivra l'opération aussi loin qu'on voudra. La raison de cette méthode d'approximation est, qu'en écrivant à la suite du reste trois zéros, c'est le multiplier par 1000, cube de 10: donc le chiffre de la racine, qu'on trouve par ce moyen, est dix fois trop grand: on doit donc le mettre au rang des dixiemes, & le séparer des entiers de la racine par une virgule, pour le réduire à sa juste valeur. Pour éclaircir cette regle générale, on va en faire l'application aux exemples suivans.

187. PROB. Tirer la racine cube du nombre 94818816.

94|818|816	456 racine cube.
308	reste suivi du prem. chiffre de la sec. tranche ; divid.
48	diviseur triple de quarré de la racine 4.
91125 . . .	cube de 45.
36938 . .	reste suivi du prem. chiffre de la trois. tranche ; divid.
6075 . .	diviseur, triple du quarré de 45.
94818816	cube de 456.
00000000	

45	
45	
225	
180	
2025 × 3 = 6075	divis.
45	
10125	
8100	
91125	cube de 45.
456	racine.
456	
2736	
2280	
1824	
207936	quarré.
456	
1247616	
1039680	
831744	
94818816	cube. Preuve.

SOLUTION. Ayant séparé les chiffres de 3 en 3 (183), j'ai trois tranches, ce qui indique qu'il y aura 3 chiffres à la racine ; cela posé j'observe que le plus grand cube contenu dans la premiere tranche 94 est 64, dont la racine est 4, je l'écris au quotient : j'ôte son cube 64 de 94, il reste 30 : j'écris à la suite de ce reste le premier chiffre 8 de la seconde tranche ; j'ai 308, qui (183) représente le triple du quarré des dixaines 4, du quotient, multiplié par les unités qu'on cherche ; je divise donc 308 par 48 triple du quarré 16 de la racine 4 ; je prévois que 48 n'est contenu dans 308 que 5 fois, pour que le reste, suivi du second chiffre 1 de cette tranche, contienne 3 fois le quarré de 5 multiplié par 4, & que le reste, suivi du dernier chiffre 8 de cette tranche, contienne le cube du chiffre 5 ; j'écris

donc 5 à la racine, à la suite de 4; je fais le cube de la racine trouvée 45; j'ai 91125, que j'ôte des deux premieres tranches 94/818, du nombre proposé 94/818/816; il reste 3693; j'écris à la suite de ce reste le premier chiffre 8 de la 3e tranche, j'ai 36938 que je divise, pour les raisons ci-devant détaillées, par 6075, triple du quarré de la racine trouvée 45; le quotient est 6, que j'écris pour 3e chiffre de la racine, parce que je prévois que le reste suivi du second chiffre 1 de cette 3e tranche, contient le triple du quarré de 6, multiplié par les chiffres précédens 45 de la racine, & que le reste suivi du 3e chiffre 6 de cette tranche, contient le cube de ce quotient 6; cela prévu, je fais le cube de toute la racine 456; j'ai 94818816, que j'ôte du nombre proposé 94818816, il ne reste rien; ce nombre est donc un cube parfait, qui a pour racine 456. Cette méthode de tirer la racine cube a l'avantage de porter avec elle sa preuve & sa démonstration; c'est la seule qu'on donnera. C. Q. F. Dét.

188. PROB. Le nombre 78965 est un cube imparfait: on demande sa racine cube à plus d'un dixieme près.

78|965	42,9 racine.
149..	dividende.
48..	diviseur, triple du quarré de la racine 4.
74088	
.4877000..	second dividende.
5292...	diviseur, triple du quarré de 42.
78965000	nombre proposé, suivi de 3 zéros.
78953,589	cube de toute la racine 42,9.
...11411	reste qu'on néglige.

42	42,9
42	42,9
84	3861
168	858
1764 × 3 = 5292	1716
42	1840,41
3528	42,9
7056	1656369
74088	368082
	736164
	78953,589

Procédé. J'observe que le plus grand cube contenu dans la premiere tranche 78 est 64, dont la racine est 4; j'ecris 4 au quotient; j'ôte ce cube 64 de 78, & j'écris à la suite du reste 14, le premier chiffre 9 de la seconde tranche 965 : j'ai 149, que je divise par 48, triple du quarré 16 de la racine trouvée 4; je prévois que dans 149 il n'y a que 2 fois 48 avec un reste, qui, suivi du second chiffre 6 de la tranche 965, contient le triple du quarré de 2, multiplié par le chiffre précédent 4 de la racine, plus un reste, qui, suivi du 3e chiffre 5 de cette tranche, contient le cube du chiffre 2 : cela prévu, j'écris 2 pour second chiffre de la racine; j'ôte du nombre proposé 78965 le cube 74088 de la racine trouvée 42, il reste 4877, & la regle est achevée; mais comme on ne veut pas négliger ce reste 4877, on écrit à sa suite 3 zéros, pour avoir à la racine un 3e chiffre, qu'on écrira au rang des dixiemes. Pour le déterminer, je divise le reste suivi

du premier des 3 zéros, ſavoir 48770 par 5292, triple du quarré de la racine trouvée 42 : on a 9 dixiemes pour 3e chiffre de la racine ; on ôte le cube 78953589 de toute la racine 42,9 du nombre propoſé ſuivi de 3 zéros, ſavoir de 78965000, ſans avoir égard aux décimales ; il reſte 11411, nombre qui ne peut pas augmenter la racine d'un dixieme d'unité, puiſqu'il eſt plus petit que le triple du quarré de cette racine (185) ; ainſi on le néglige. Si on vouloit avoir des centiemes, il faudroit écrire à la ſuite de ce reſte 3 zéros, & ſuivre l'opération ; on auroit un reſte, à la ſuite duquel on écriroit 3 zéros, ſi on vouloit avoir des milliemes ; on auroit un reſte, qui, ſuivi de 3 zéros, donneroit des dix milliemes ; ainſi de ſuite à l'infini, ſans eſpérer de trouver la vraie racine. Il y aura toujours un reſte, parce que le cube d'un nombre compoſé d'entiers & de parties de l'entier, ne peut être un nombre entier. Ces deux exemples ſuffiſent.

189. PROB. Tirer la racine cube d'une fraction quelconque.

SOLUTION. 1°. Si les termes de la fraction ſont des cubes parfaits, on tirera la racine cube de chacun, & on aura une fraction, qui ſera la racine cube de la fraction propoſée ; on trouve que la race cube de $\frac{27}{64}$ eſt $\frac{3}{4}$; car $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$; de même que celle de $\frac{343}{729} = \frac{7}{9}$; car $\frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{343}{729}$ &c.

2°. Si les termes de la fraction, ou l'un des deux, ne ſont pas des cubes parfaits, il faut réduire la fraction propoſée en décimales d'un nombre de chiffres diviſible par 3, pour que la dénomination ſoit le cube de 10, de 100, de

1000, &c. & tirer la racine cube des décimales considérées comme des nombres entiers.

Par exemple, si l'on propose de tirer la racine cube de la fraction $\frac{5}{7}$, & d'en approcher à une centieme près, je la réduis en décimales (149), j'ai $\frac{5}{7} = 0{,}714285$, négligeant le reste. Si l'on tire la racine cube de cette fraction décimale à l'ordinaire, on trouvera qu'elle est 0,89., avec un reste 9316, qui ne peut pas augmenter la racine d'un centieme d'unité (185); en voici le calcul.

0,714|285	0,89 racine.
512...	cube de 8.
2022..	dividende.
192..	triple du quarré de la racine trouvée 8 : diviseur.
704969	cube de la racine trouvée 89.
009316	reste qu'on néglige.
714285	Preuve.

0,89
0,89
801
712
7921
0,89
71289
63368
704969

190. PROB. Tirer la racine cube d'un nombre complexe composé de toises cubes & de parties de toise cube.

Regle générale. 1°. On tirera la racine cube des entiers à l'ordinaire (186A); 2°. on réduira le reste en *toises-toises-pieds*, on divisera ce nombre par le triple du quarré des toises de la racine, on aura des pieds au quotient; on fera le cube de toute la racine; on l'ôtera de tout le nombre proposé; on aura un reste, qu'on réduira en *toises-toises-pouces*; on le divisera par le triple du quarré de

toute la racine trouvée, considéré comme un nombre abstrait ; on aura des pouces pour quotient ; on fera le cube de toute la racine complexe, on l'ôtera de tout le nombre proposé ; si on a un reste, on le réduira en *toises-toises lignes* ; on le divisera par le triple du quarré de toute la racine complexe, considéré comme un nombre abstrait, on aura des lignes à la racine ; on fera le cube de toute la racine trouvée ; on l'ôtera du nombre complexe proposé : s'il y a un reste, on pourra le négliger ou suivre le même procédé ; on aura des points ou primes, des secondes, des tierces, &c. Appliquons cette regle générale à un exemple.

191. PROB. Tirer la racine cube du nombre complexe.

$17^{ttt}\ 1^{ttpi}\ 5^{ttpo}\ 8^{ttlig}\ 6^{ttpts}$	$2^{t}\ 3^{pi}\ 6^{po}$ racine.
$9^{ttt}\ 1^{ttpi}$ &c.	reste qui, réduit en toises-toises pieds, devient
55^{ttpi}	dividende.
12^{tt}	diviseur, triple du quarré de la racine 2^{t}.
$15^{ttt}\ 3^{ttpi}\ 9^{ttpo}$. . . .	cube de toute la racine trouvée $2^{t}\ 3^{pi}$
$1^{ttt}\ 3^{ttpi}\ 8^{ttpo}$.	reste à réduire en toises-toises pou. on a 116^{ttpp}.
116^{ttpo}	dividende.
$18^{tt}\ 4^{tpi}\ 6^{ttpo}$	diviseur, triple du quarré de la racine $2^{t}\ 3^{pi}$.
$17^{ttt}\ 1^{ttpi}\ 5^{ttpo}\ 8^{ttlig}\ 6^{ttpts}$	cube de la racine trouvée $2^{t}\ 3^{pi}\ 6^{po}$.

Procédé. Le plus grand cube contenu dans 17

eſt 8, dont la racine eſt 2 : j'écris cette racine au quotient ; j'ôte ſon cube 8 du nombre propoſé $17^{ttt}\ 1^{ttpi}$, &c ; il reſte $9^{ttt}\ 1^{ttpi}$, &c, que je réduis en toiſes-toiſes-pieds, j'ai 55^{ttpi} (négligeant pour l'inſtant les ſous-eſpeces au deſſous) ; je diviſe ces 55^{ttpi} par 12^{tt}, triple du quarré de la racine 2^{t} ; j'ai pour quotient 3 pieds, que j'écris à la ſuite de la racine ; j'ôte du nombre propoſé le cube $15^{ttt}\ 3^{ttpi}\ 9^{ttpo}$ de la racine trouvée $2^{t}\ 3^{pi}$; il reſte $1^{ttt}\ 3^{ttpi}\ 8^{ttpo}$ &c. que je réduis en toiſes-toiſes-pouces (négligeant pareillement les ſous-eſpeces au-deſſous des toiſes-toiſes-pouces), j'ai 116^{ttpo}, que je diviſe par $18^{tt}\ 4^{tpi}\ 6^{tpo}$, triple du quarré de la racine trouvée $2^{t}3^{pi}$; j'ai pour quotient 6 pouces, que j'écris à la racine ; je fais le cube de toute la racine $2^{t}\ 3^{pi}\ 6^{po}$, j'ai $17^{ttt}\ 1^{ttpi}\ 5^{ttpo}\ 8^{ttlig}\ 6^{ttpts}$, que j'ôte du nombre propoſé, il ne reſte rien ; & la regle eſt achevée. C. Q. F. Dét.

192. Si l'on trouve cette méthode trop compliquée, on peut réduire les parties du nombre complexe en fraction décimale d'un nombre de chiffres diviſible par 3 (162). Par exemple, ſi l'on propoſe de tirer la racine cube de $143^{ttt}\ 5^{ttpi}\ 11^{ttpo}$, j'obſerve que 5^{ttpi} ſont le $\frac{5}{6}$ de la toiſe cube, & 11^{ttpo} les $\frac{11}{72}$; ces deux fractions font enſemble $\frac{71}{72}=0,986111$ &c ; je joins ces décimales aux entiers, j'ai 143,986111, dont on tirera la racine cube à l'ordinaire (188) ; on trouvera pour racine 5,24, avec un reſte qu'on négligera.

On peut auſſi réduire le nombre complexe à la plus petite eſpece, ici en pouces cubes, & en tirer la racine cube. On aura pour racine des pouces, qu'on réduira en toiſes, en les diviſant par 72 (parce que la toiſe a 72 pouces de longueur),

& en pieds, en les divisant par 12. Cette méthode, qui paroît d'abord facile, est très-longue; car la *toise cube* contient 373248 pouces cubes; la *toise-toise-pied* $62208 = 72 \times 72 \times 12$, & la *toise-toise-pouce* 5184 pouces cubes; aussi on ne fait que l'indiquer.

On fait usage de la racine cube dans l'architecture civile & militaire, dans la science des mines, & dans une infinité de problêmes : il est donc essentiel de se la rendre familiere.

DES RAPPORTS, DES PROPORTIONS,

DES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

& Géométriques, & des Regles qui en dépendent.

194. DÉF. ON appelle *rapport* ou *raison* le résultat de la comparaison d'un nombre à un autre nombre de même espece.

1°. Si l'on considere de combien le premier surpasse le second ou en est surpassé, le rapport *est arithmétique*; il s'exprime par une soustraction. Ainsi le rapport arithmétique de 12 à 9 est 3, ou $12 - 9 = 3$; le premier terme 12 du rapport est l'*antécédent*, le second 9 le *conséquent*, & 3 est l'excès, la différence, ou la *raison arithmétique* de 12 à 9.

Des rapports arithmétiques sont égaux, si les antécédens surpassent également leurs conséquens, ou en sont également surpassés.

2°. Si on considere combien de fois le premier nombre contient le second, ou est contenu en lui, le rapport est géométrique, il s'exprime par

une division; ainsi le rapport géométrique de 12 à 3 est 4, ou $\frac{12}{3} = 4$; 12 est *l'antécédent*, 3 le *conséquent*, 4 est la *raison* ou l'*exposant* du rapport géométrique; l'antécédent & le conséquent d'un rapport arithmétique ou géométrique se nomment aussi *les termes* du rapport.

Des rapports géométriques sont égaux, lorsque les antécédens contiennent également leurs conséquens, ou leurs parties correspondantes, comme leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, &c.

195. DÉF. On appelle *proportion* la comparaison de deux rapports égaux.

1°. Si les rapports sont arithmétiques, la proportion est arithmétique; on l'exprime ainsi: 12: 9 :· 7 : 4, & on prononce 12 est à 9 arithmétiquement comme 7 est à 4, ou 12 surpasse 9 comme 7 surpasse 4; le premier & le 4e termes sont *les extrêmes*; le second & le troisieme, *les moyens*; le premier & le 3e termes sont les antécédens; le second & le 4e les conséquens. Lorsque les moyens sont égaux, la proportion est continue; ainsi cette proportion, 12 : 9 :· 9 : 6 est continue; on peut l'écrire ainsi ÷ 12, 9, 6. Le second terme 9 se nomme *moyen proportionnel arithmétique*.

2°. Si les deux rapports égaux que l'on compare sont géométriques, la proportion est géométrique; on l'exprime ainsi: 12 : 3 : : 20 : 5, & on prononce, 12 est à 3 comme 20 est à 5, ou 12 contient 3 comme 20 contient 5; elle est continue, si le conséquent du premier rapport sert d'antécédent dans le second rapport, comme dans cette proportion : 12 : 6 : : 6 : 3; on peut l'écrire ainsi : $\div\!\!\div$ 12, 6, 3; le second terme de la proportion continue se nomme *moyen proportionnel géométrique*.

196. DÉF. Une suite de nombres qui se surpassent également se nomme *progression arithmétique*: elle est *croissante* si les termes vont en augmentant ; elle est *décroissante*, s'ils vont en diminuant. L'une & l'autre se désignent comme on le voit ci-dessous ; le nombre qui exprime de combien un terme surpasse son voisin est la *différence*.

÷ 2, 5, 8, 11, 14, 17, &c ; progression arithm. croissante, dont la différence est 3.

÷ 24, 20, 16, 12, 8, 4, &c ; progression arithm. décroissante, dont la différence est 4.

197. DÉF. Une suite de grandeurs ou de nombres qui se contiennent également, forme une progression géométrique. La quantité ou le nombre qui exprime combien chaque terme contient le suivant ou est contenu en lui, est la *raison* ou l'*exposant* de la progression. Elle est croissante ou décroissante, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant ; on exprime ainsi les progressions géométriques :

∺ 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c., progression croissante, dont la raison est 3.

∺ a, b, c, d, f, g, &c., progression géométrique, dont la raison $p = 3$ dans cet exemple : ou bien

1 : 3 :: 3 : 9 :: 9 : 27 :: 27 : 81 :: 81 : 243, progression croissante.

$a : b :: b : c :: c : d :: d : f :: f : g$. Cette expression désigne une progression géométrique quelconque.

On voit 1°. que tous les termes, moins le dernier, forment les antécédens de cette suite de rapports égaux ; 2°. que tous les termes, moins le premier, forment les conséquens. C. Q. F. B. R.

198. DÉF. Deux nombres ſont dits *réciproquement proportionnels* à deux autres, ou ſimplement *réciproques* à deux autres, lorſque les deux premiers forment les extrêmes d'une proportion, & les deux autres les moyens ; ainſi les extrêmes d'une proportion ſont réciproques aux deux termes moyens.

199. *Principe.* On n'augmente ni ne diminue point l'expoſant d'un rapport géométrique, en multipliant ou diviſant les termes de ce rapport par un même nombre ; ſoit le rapport $\frac{12}{3} = 4$; on aura $\frac{12\times 2}{3\times 2} = \frac{24}{6} = 4$; de même $\frac{12\div 3}{3\div 3} = \frac{4}{1} = 4$ &c.

200. Plus l'antécédent d'un rapport contient de fois ſon conſéquent, plus ce rapport eſt grand; ainſi le rapport de 12 à 3 eſt plus grand que celui de 10 à 5, parce que 12 contient 3 quatre fois, & que 10 ne contient 5 que deux fois ; pour indiquer que le rapport de 12 à 3 eſt plus grand que celui de 10 à 5, on écrit $12 : 3 > 10 : 5$, & on prononce 12 eſt à 3 plus grand que 10 à 5 : on voit qu'en renverſant les termes, on aura $5 : 10 > 3 : 12$; car 5 contient la moitié de ſon conſéquent 10, tandis que 3 ne contient que le quart de ſon conſéquent 12. C. Q. F. B. R.

201. DÉF. On appelle *rapport compoſé* le produit de deux ou de pluſieurs antécédens comparés au produit de leurs conſéquens ; ainſi le rapport compoſé des rapports ſimples $\frac{12}{3}$, $\frac{10}{2}$ eſt $\frac{12\times 10}{3\times 2} = \frac{120}{6}$; celui de $\frac{9}{3}$, de $\frac{12}{8}$, de $\frac{4}{2}$, eſt $\frac{9\times 12\times 4}{3\times 8\times 2} = \frac{432}{48}$ &c.

202. D'où il ſuit qu'un rapport compoſé a pour expoſant le produit des expoſans des rapports ſimples qui le compoſent.

Soient les rapports ſimples $\frac{12}{4}=3$, $\frac{10}{5}=2$. Il s'agit de démontrer que $\frac{12\times 10}{4\times 5}=3\times 2$, ou que $\frac{120}{20}=6$.

DÉMONST. On a $12=4\times 3$, $10=5\times 2$ (71); & ſi on multiplie ces deux équations terme par terme, on aura $12\times 10=4\times 5\times 3\times 2$; & diviſant de part & d'autre par le produit 4×5 des conſéquens, on aura $\frac{12\times 10}{4\times 5}=3\times 2$, ou $\frac{120}{20}=6$. C. Q. F. D.

203. DÉF. Un rapport géométrique composé de deux rapports égaux, eſt un *rapport doublé*; celui qui eſt composé de trois rapports égaux, eſt *triplé* d'un des rapports ſimples, &c; ainſi le rapport doublé a pour expoſant le quarré d'un des rapports ſimples qui le forment; le rapport triplé a pour expoſant le cube de l'expoſant d'un des rapports ſimples qui le forment. Soient les 3 rapports égaux $\frac{12}{4}=3$, $\frac{15}{5}=3$, $\frac{6}{2}=3$. On aura le rapport doublé $\frac{12\times 15}{4\times 5}=3\times 3=9$, quarré de l'expoſant 3 d'un des rapports ſimples; de même le rapport triplé $\frac{12\times 15\times 6}{4\times 5\times 2}=3\times 3\times 3=27$, cube de l'expoſant 3 d'un des rapports ſimples. C. Q. F. B. R.

204. THÉOR. Dans toute proportion arithmétique, 1°. la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens; 2°. le quatrieme terme eſt égal à la ſomme des moyens moins le premier terme; 3°. ſi la proportion arithmétique eſt continue, la ſomme des extrêmes eſt double du terme moyen, ou le terme moyen arithmétique entre deux nombres eſt la moitié de la ſomme de ces deux nombres.

DÉM. 1°. Si $12 : 9 :\cdot 7 : 4$, on aura, puisque ces rapports arithmétiques sont égaux, $12 = 9 + 3$, & $7 = 4 + 3$; & si on ajoute 12 avec la valeur de 7, & 7 avec la valeur de 12, on aura (100) des sommes égales, savoir $12 + 4 + 3 = 7 + 9 + 3$; & ôtant la différence 3 de part & d'autre, on aura la somme des extrêmes $12 + 4 = 7 + 9$, sommes des moyens. C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisque $12 + 4 = 9 + 7$, on aura $4 = 9 + 7 - 12$ (113). C. Q. F. 2°. D.

3°. Si $15 : 12 :\cdot 12 : 9$, on aura $15 + 9 = 12 + 12$. Donc $12 = \frac{15 + 9}{2}$. C. Q. F. 3°. D.

205. D'où il suit que si deux nombres forment une somme égale à celle de deux autres nombres, les deux premiers nombres sont les extrêmes d'une proportion Arithmétique, dont les deux autres sont les moyens. Si on a $17 + 3 = 11 + 9$, je dis, que $17 : 11 :\cdot 9 : 3$; on voit que la différence 6 de 17 à 11 est la même que celle de 9 à 3; mais pour le démontrer en général, si on ôte les conséquens 11 & 3 de chaque membre de l'équation $17 + 3 = 11 + 9$, on aura (112) des restes égaux, ainsi $17 + 3 - 11 - 3 = 11 + 9 - 11 - 3$, ou $17 - 11 = 9 - 3 = 6$. Donc, &c. C. Q. F. B. R.

206. PROB. 1°. Trouver un 4e proportionnel arithmétique à 3 nombres donnés; 2°. trouver un 3e proportionnel arithmétique à 2 nombres donnés; 3°. trouver un moyen proportionnel arithmétique entre deux nombres donnés.

SOLUTION. 1°. On ajoutera le second avec le 3e, on ôtera de leur somme le premier, le reste sera le 4e nombre cherché (204), $12 : 16 :\cdot 21 : x = 21 + 16 - 12 = 25$. C. Q. F. 1°. Dét.

2°. Si aux nombres 11 & 18 on demande un 3ᵉ proportionnel arithmétique, on l'exprimera par x; on aura $11 : 18 : \cdot\ 18 : x = 18 + 18 - 11 = 25$. C. Q. F. 2°. Dét.

3°. Si on veut un moyen arithmétique x, entre 11 & 25, on disposera ces nombres en proportion arithmétique continue, comme si x étoit connu, on aura $11 : x : \cdot\ x : 25$; d'où (204) $11 + 25 = 2x$; divisant par 2, on aura $x = \frac{11 \times 25}{2} = 18$. On voit donc qu'il n'y a qu'à faire une somme des deux nombres, en prendre la moitié, & l'on aura le moyen proportionnel arithmétique demandé. C. Q. F. 3°. Dét.

207. THÉOR. Dans toute proportion géométrique 1°. le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

2°. Le 4ᵉ terme est égal au produit des moyens divisé par le premier terme.

3°. Si la proportion est continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen, ou le moyen proportionnel géométrique entre deux nombres est égal à la racine quarrée du produit de ces nombres.

Si $12 : 3 :: 8 : 2$, il faut démontrer :

1°. Que $12 \times 2 = 8 \times 3$.

2°. Que $2 = \frac{8 \times 3}{12}$.

3°. Que si $12 : 6 :: 6 : 3$, on aura $12 \times 3 = 6 \times 6 = 36$, quarré de 6, & par conséquent $6 = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36}$.

DÉM. 1°. on a $\frac{12}{3} = 4$ . . . . . $12 = 3 \times 4$ } D'où (71)
2°. . . . . $\frac{8}{2} = 4$ . . . . . $8 = 2 \times 4$

& multipliant 12 par la valeur de 8, & 8 par la

valeur de 12, on aura des produits égaux; savoir, $12 \times 2 \times 4 = 8 \times 3 \times 4$; enfin, divisant de part & d'autre par 4, on aura $12 \times 2 = 8 \times 3$. C. Q. F. 1°. D.

2°. Si on divise les membres de cette équation $12 \times 2 = 8 \times 3$ par 12, on aura $2 = \frac{8 \times 3}{12}$; C. Q. F. 2°. D.

3°. Puisqu'on vient de démontrer que dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, on aura $12 \times 3 = 6 \times 6$; tirant la racine quarrée de part & d'autre, on aura $6 = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36}$; C. Q. F. 3°. D.

Dans la suite, lorsqu'on parlera de rapport, de proportion & de progression, sans en désigner l'espece, ce sera des géométriques dont il sera question.

208. THÉOR. Si le produit de deux nombres égale celui de deux autres nombres, les deux premiers sont *réciproquement* proportionnels aux deux autres, c'est-à-dire, les deux premiers forment les extrêmes d'une proportion, & les deux autres les moyens.

Si $12 \times 3 = 9 \times 4$, il faut démontrer que $12 : 4 :: 9 : 3$.

DÉM. Si on divise ces deux produits égaux $12 \times 3 = 9 \times 4$ par le produit des conséquens 4×3, on aura $\frac{12 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9 \times 4}{4 \times 3}$; & corrigeant l'expression, on aura $\frac{12}{4} = \frac{9}{3}$, d'où $12 : 4 :: 9 : 3$. C. Q. F. D.

209. Les théorêmes précédens sont le fondement des regles de trois, de compagnie, de change, d'alliage, de fausses positions, &c; on

en déduit toutes les propriétés des proportions & des progressions géométriques. On en fait usage dans toutes les parties des mathématiques ; il est essentiel de se les rendre familiers, de même que le corollaire qui suit.

210. COR. Il suit de ce qui précede 1°. que 3 termes quelconques d'une proportion géométrique étant connus, on connoîtra facilement le 4e inconnu : si c'est un des termes moyens qu'on cherche, on divisera le produit des extrêmes par le moyen connu ; si c'est un des extrêmes, on divisera le produit des moyens par l'extrême connu. Chaque quotient donnera le terme demandé : si on exprime ce terme inconnu par x, & qu'on ait $20 : x :: 12 : 3$, on aura (207) $12 \times x = 20 \times 3$, d'où $x = \frac{20 \times 3}{12} = 5$. De même si $x : 24 :: 3 : 18$, on aura $x = \frac{24 \times 3}{18} = 4$. Donc, &c.

2°. Qu'on peut disposer les termes d'une proportion géométrique de huit manieres différentes, dont chacune sera une proportion. Chaque changement a un nom particulier relativement à la premiere disposition qu'on appelle *proportion directe*.

Si $12 : 3 :: 8 : 2$.. Proportion directe.

$12 : 8 :: 3 : 2$.. En *alternant* : c'est faire des antécédens le 1er rapport, & des conséquens le 2e.

$3 : 12 :: 2 : 8$.. En *raison inverse* : c'est faire des conséquens les antéc.

$3 : 2 :: 12 : 8$.. En *alternant par les conséquens* : c'est faire des conséquens le 1er rapport, & des antécédens le 2e rapp.

Si 2 : 8 :: 3 : 12.. *En renversant.*

2 : 3 :: 8 : 12.. *En renversant & alternant par les conséquens :* c'est faire des conséquens renversés le 1er, & rapport des antécéd. renversés le 2e.

8 : 2 :: 12 : 3.. *En changeant les rapports.*

8 : 12 :: 2 : 3.. *En renversant & alternant par les antécédens :* c'est faire des antécédens renversés le 1er rapport, & des conséquens renversés, le second.

On voit dans ces huit changemens que les antécédens contiennent également leurs conséquens, & que dans chacun le produit des extrêmes égale celui des moyens ; donc dans chacun il y a proportion géométrique (208). C. Q. F. B. R.

211. THÉOR. 1°. Dans tout rapport géométrique, l'antécédent est au conséquent comme l'exposant du rapport est à l'unité.

2°. Dans la division, le dividende est au diviseur comme le quotient est à l'unité.

3°. Dans la multiplication, le produit est au multiplicande comme le multiplicateur est à l'unité.

Il faut démontrer que, 1°. si $\frac{12}{3} = 4$, on aura 12 : 3 :: 4 : 1.

DÉM. Multipliant par 3 les deux termes de l'équation, on a $12 = 3 \times 4$, ou $12 \times 1 = 3 \times 4$, d'où (208) 12 : 3 :: 4 : 1. C. Q. F. 1°. D.

2°. Tout rapport géométrique représente une division dans laquelle l'antécédent est le dividende ; le conséquent, le diviseur, & l'exposant du rapport, le quotient. Donc le dividende est

au diviseur comme le quotient est à l'unité. C. Q. F. 2°. D.

3°. Un rapport géométrique $\frac{24}{8} = 3$ représente aussi une multiplication, dans laquelle l'antécédent est le produit; le conséquent, le multiplicande, & l'exposant du rapport, le multiplicateur. Donc le produit est au multiplicande comme le multiplicateur est à l'unité. C. Q. F. 3°. D. & B. R.

212. THÉOR. Dans toute proportion géométrique, 1°. la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent.

2°. La différence des antécédens est à la différence des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent.

3°. La somme des antécédens est à celle des conséquens, comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens.

Si $12 : 3 :: 8 : 2$, *à démontrer* que:

1°. $12 + 8 : 3 + 2 :: 12 : 3$

2°. $12 - 8 : 3 - 2 :: 12 : 3$

3°. $12 + 8 : 3 + 2 :: 12 - 8 : 3 - 2$.

DÉM. Des rapports égaux ont le même exposant.

Donc si on a $\frac{12}{3} = 4$ } . . . . $12 = 3 \times 4$
} D'où (71)
on a aussi $\frac{8}{2} = 4$ } . . . . . . $8 = 2 \times 4$

Ajoutant ces deux équations, on aura $12 + 8 = 3 \times 4 + 2 \times 4$, divisant de part & d'autre par $3 + 2$, somme des conséquens $\frac{12+8}{3+2} = 4$; mais $\frac{12}{3} = 4$; ainsi ces rapports ayant le même exposant 4, sont égaux; donc $12 + 8 : 3 + 2 :: 12 : 3$. C. Q. F. 1°. D.

2°. Si on ôte l'équation $8=2\times4$ de l'équation $12=3\times4$, ou aura $12-8=3\times4-2\times4$; si l'on divise de part & d'autre par $3-2$, différence des conséquens, on aura $\frac{12-8}{3-2}=4$; mais $\frac{12}{3}=4$. Donc $12-8:3-2::12:3$. C. Q. F. 2°. D.

3°. On sait que des rapports égaux à un même rapport, sont égaux entr'eux : or le rapport de $12-8$ à $3-2$ est égal à celui de 12 à 3, ainsi que celui de $12+8$ à $3+2$: donc $12+8:3+2::12-8:3-2$; donc, &c. C. Q. F. 3°. D.

213. D'où il suit que si on a plusieurs rapports égaux, la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent. Si $12:3::8:2::20:5$, on démontrera, comme ci-dessus, que $12+8+20:3+2+5::12:3$. On voit que $40:10::12:3$. C. Q. F. B. R.

214. Théor. Dans toute proportion géométrique, 1°. le premier terme plus ou moins le second, est au second, comme le 3e plus ou moins le 4e, est au 4e.

2°. Le premier terme plus ou moins le second, est au 1er comme le 3e plus ou moins le 4e, est au 3e.

Si $12:3::8:2$, *à démontrer* que,

1°. $\begin{cases} 12+3:3::8+2:2, \text{ \& que} \\ 12-3:3::8-2:2. \end{cases}$

2°. $\begin{cases} 12+3:12::8+2:8, \text{ \& que} \\ 12-3:12::8-2:8. \end{cases}$

Dém. On voit que $12+3$ contient 3 une fois de plus que 12 ne contient 3; de même que $8+2$ contient 2 une fois de plus que 8 ne contient 2 : on voit pareillement que $12-3$ contient 3 une fois de moins que 12 ne contient 3; par la

même raison $8-2$ contient 2 une fois de moins que 8 ne contient 2 : donc, &c. C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisque $12:3::8:2$, on aura en alternant $12:8::3:2$, d'où (212) $12+3:8+2::12:8$, & en alternant, on aura $12+3:12::8+2:8$; on a aussi (212) $12-3:8-2::12:8$, & en alternant $12-3:12::8-2:8$. C. Q. F. 2°. D.

215. THÉOR. Si on multiplie ou divise deux nombres quelconques 12 & 8 par un même nombre 4, les produits & les quotiens sont entr'eux comme ces nombres.

A dém. 1°. que $12\times4:8\times4::12:8$;
2°. que $\frac{12}{4}:\frac{8}{4}::12:8$.

DÉM. Cela est vrai, puisque dans l'un & l'autre cas le produit des extrêmes égale celui des moyens ; car on a, 1°. $12\times4\times8=8\times4\times12$; 2°. $\frac{12\times8}{4}=\frac{8\times12}{4}$. Donc, &c. C. Q. F. D.

216. THÉOR. Si on divise un nombre quelconque, par exemple, 24 par 2 nombres différens 4 & 12, les quotiens $\frac{24}{4}$ & $\frac{24}{12}$ sont entr'eux réciproquement comme les diviseurs 4 & 12.

A démontrer que $\frac{24}{4}:\frac{24}{12}::12:4$.

DÉM. Cela est vrai, puisque le produit des extrêmes égale celui des moyens ; on voit que $\frac{24\times4}{4}=\frac{24\times12}{12}$. D'ailleurs, $\frac{24}{4}=6$, $\frac{24}{12}=2$; or il est évident que $6:2::12:4$. Donc, &c. C. Q. F. D.

217. THÉOR. Dans toute proportion géométrique, 1°. si on multiplie ou divise les termes d'un rapport par un nombre, & les termes de l'autre rapport par un autre nombre quelconque, les produits ou les quotiens sont en proportion.

2°. Si on multiplie ou divise les antécédens

par un nombre, & les conséquens par un autre nombre, les résultats sont en proportion.

Si $12 : 3 :: 8 : 2$, *à dém.* que,

1°. $\frac{12}{4} : \frac{3}{4} :: 8 \times 2 : 2 \times 2$; } 1er cas.
2°. $12 \times 5 : 3 \times 5 :: 8 \times 4 : 2 \times 4$ }

3°. $\frac{12}{5} : \frac{3}{4} :: \frac{8}{5} : \frac{2}{4}$, } 2e cas.
4°. $12 \times 2 : 3 \times 4 :: 8 \times 2 : 2 \times 4$ }

DÉM. Cela est vrai, puisque dans chacune de ces proportions le produit des extrêmes égale celui des moyens : en effet, on sait que (207) $12 \times 2 = 3 \times 8$, d'où l'on voit, 1°. que $\frac{12 \times 2 \times 2}{4} = \frac{3 \times 8 \times 2}{4} = 12$; 2°. que $12 \times 5 \times 2 \times 4 = 3 \times 5 \times 8 \times 4 = 480$; 3°. que $\frac{12 \times 2}{5 \times 4} = \frac{3 \times 8}{5 \times 4} = \frac{24}{20}$; 4°. que $12 \times 2 \times 2 \times 4 = 3 \times 4 \times 8 \times 2 = 192$. Donc, &c. C. Q. F. D.

218. THÉOR. Si on multiplie ou divise les termes d'une proportion par les termes correspondans d'une autre proportion, les résultats sont en proportion.

Si on a d'une part $12 : 3 :: 8 : 2$.
de l'autre $6 : 2 :: 9 : 3$

A dém. que 1°. $12 \times 6 : 3 \times 2 :: 8 \times 9 : 2 \times 3$
2°. $\frac{12}{6} : \frac{3}{2} :: \frac{8}{9} : \frac{2}{3}$

DÉM. Cela est vrai, puisque dans l'un & l'autre cas, le produit des extrêmes égale celui des moyens : on sait en effet (207) que $12 \times 2 = 3 \times 8$, & que $6 \times 3 = 2 \times 9$; d'où l'on voit, 1°. que $12 \times 6 \times 2 \times 3 = 3 \times 2 \times 8 \times 9 = 432$; 2°. que $\frac{12 \times 2}{6 \times 3} = \frac{3 \times 8}{2 \times 9} = \frac{24}{18}$. Donc, &c. C. Q. F. D.

219. THÉOR. Si quatre nombres sont en pro-

portion géométrique, 1°. leurs quarrés, leurs cubes & toutes leurs puissances sont en proportion; 2°. leurs racines quelconques le sont aussi:

Si $9:3::6:2$, *à dém. que*:

1°. $\begin{cases} 9\times9 : 3\times3 :: 6\times6 : 2\times2, \text{ ou } 81 : 9 :: 36 : 4 \\ 9\times9\times9 : 3\times3\times3 :: 6\times6\times6 : 2\times2\times2, \text{ou } 729 : 27 :: 216 : 8 \end{cases}$

2°. $\begin{cases} \sqrt{9} : \sqrt{3} :: \sqrt{6} : \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{9} : \sqrt[3]{3} :: \sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{2} \end{cases}$

DÉM. 1°. On a $\frac{9}{3} = \frac{6}{2}$, élevant au quarré les deux termes de cette équation, on aura $\frac{9\times9}{3\times3} = \frac{6\times6}{2\times2}$, d'où (195) $9\times9 : 3\times3 :: 6\times6 : 2\times2$, ou $81 : 9 :: 36 : 4$; pareillement, élevant au cube les deux termes de l'équation $\frac{9}{3} = \frac{6}{2}$, on aura $\frac{9\times9\times9}{3\times3\times3} = \frac{6\times6\times6}{2\times2\times2}$, d'où (195) $9\times9\times9 : 3\times3\times3 :: 6\times6\times6 : 2\times2\times2$, ou $729 : 27 :: 216 : 8$; il en sera de même de toute autre puissance: donc, &c. C. Q. F. 1°. D.

2°. On sait que si deux grandeurs ou deux nombres quelconques sont égaux, leurs racines quarrées, ou cubiques, & leurs racines quelconques sont égales; mais on a $9 * 3 = 6 * 2$, donc $\sqrt{9} * \sqrt{3} = \sqrt{6} * \sqrt{2}$, d'où $\sqrt{9} : \sqrt{3} :: \sqrt{6} : \sqrt{2}$; on aura aussi $\sqrt[3]{9} * \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6} * \sqrt[3]{2}$, d'où $\sqrt[3]{9} : \sqrt[3]{3} :: \sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{2}$; il en sera de même de toute autre racine: donc, &c. C. Q. F. 2°. D.

220. THÉOR. Dans toute proportion géométrique, 1°. le produit des antécédens est à celui des conséquens, comme le quarré de chaque antécédent est au quarré de son conséquent; 2°. si la proportion est continue, le premier

terme est au 3e comme le quarré du premier terme est au quarré du second terme :

1°. Si $12 : 3 :: 8 : 2$, *à dém.* que $12 \times 8 : 3 \times 2 :: 12 \times 12 : 3 \times 3 :: 144 : 9$.

2°. Si $12 : 6 :: 6 : 3$, *à dém.* que $12 : 3 :: 12 \times 12 :: 6 \times 6 : 144 :: 36$.

DÉM. On a $\frac{12}{3} = 4$ & $\frac{8}{2} = 4$. Multipliant ces deux équations terme par terme, on aura $\frac{12 \times 8}{3 \times 2} = 4 \times 4 = 16$; mais $\frac{12}{3} = 4$; donc, élevant les termes de cette équation au quarré, on aura $\frac{12 \times 12}{3 \times 3} = 4 \times 4$, ou $\frac{144}{9} = 16$. Donc $\frac{12 \times 8}{3 \times 2} = \frac{12 \times 12}{3 \times 3}$; d'où $12 \times 8 : 3 \times 2 :: 12 \times 12 : 3 \times 3 :: 144 : 9$. C. Q. F. 1°. D.

2°. On a $\frac{12}{6} = 2$ & $\frac{6}{3} = 2$; multipliant ces deux équations terme par terme, on aura $\frac{12 \times 6}{6 \times 3} = 2 \times 2$, ou $\frac{12}{3} = 4$; mais $\frac{12}{6} = 2$, donc $\frac{12 \times 12}{6 \times 6} = 4$; conséquemment $\frac{12}{3} = \frac{12 \times 12}{6 \times 6} = \frac{144}{36}$; d'où l'on déduit cette proportion $12 : 3 :: 12 \times 12 : 6 \times 6$, ou $12 : 3 :: 144 : 36$. Donc, &c. C. Q. F. 2°. D.

221. REMARQUE. Le premier cas de cette proposition sert à démontrer en géométrie, que les surfaces des figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés correspondans ou homologues : le second cas donne le moyen de faire, sur un plan, une figure semblable à une figure donnée & en raison donnée; c'est-à-dire, qui en soit le double, le triple, &c. les Géometres doivent donc se la rendre familiere.

222. THÉOR. Si on a 3 rapports géométri-

ques égaux, le produit des antécédens eſt au produit des conſéquens, comme le cube de chaque antécédent eſt au cube de ſon conſéquent.

Si 12 : 6 :: 8 : 4 :: 10 : 5, *à dém.* que 12 × 8 × 10 : 6 × 4 × 5 :: 12 × 12 × 12 : 6 × 6 × 6 :: 1728 : 216.

DÉM. On a $\frac{12}{6} = 2$, $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{10}{5} = 2$. Si on multiplie ces trois équations terme par terme, on aura $\frac{12 \times 8 \times 10}{6 \times 4 \times 5} = 2 \times 2 \times 2 = 8$; & ſi on fait le cube de la premiere équation, on aura $\frac{12 \times 12 \times 12}{6 \times 6 \times 6} = 2 \times 2 \times 2 = 8$; on a donc deux rapports égaux, qui donnent cette proportion 12 × 8 × 10 : 6 × 4 × 5 :: 12 × 12 × 12 : 6 × 6 × 6 :: 1728 : 216. Donc, &c. C. Q. F. D.

AUTRE DÉM. Les 3 rapports égaux 12 : 6 :: 8 : 4 :: 10 : 5 fourniſſent ces 3 analogies :

1°. 12 : 6 :: 12 : 6
2°. 8 : 4 :: 12 : 6 } Multipliant terme par
3°. 10 : 5 :: 12 : 6

terme ces 3 analogies, on aura 12 × 8 × 10 : 6 × 4 × 5 :: 12 × 12 × 12 : 6 × 6 × 6 :: 1728 : 216. C. Q. F. D.

223. REMARQUE. Cette propoſition ſert en géométrie à démontrer, 1°. que les ſpheres ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diametres ; 2°. & en général, que les ſolidités des corps, ou des ſolides ſemblables quelconques, ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues ou correſpondans. C. Q. F. B. R.

224. THÉOR. Si quatre nombres ſont en progreſſion géométrique, le premier terme eſt au 4ᵉ comme le cube du premier eſt au cube du ſecond.

Si on a ∺ 2, 4, 8, 16, ou 2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16. *A dém.* que 2 : 16 :: 2 × 2 × 2 : 4 × 4 × 4 :: 8 : 64.

DÉM. On a $\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$, ou $\frac{2}{4} = \frac{2}{4}$; $\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$; $\frac{8}{16} = \frac{2}{4}$. Si on multiplie terme par terme ces 3 équations, on aura $\frac{2\times4\times8}{4\times8\times16} = \frac{2\times2\times2}{4\times4\times4}$; si on corrige l'expression du premier nombre, on aura $\frac{2}{16} = \frac{2\times2\times2}{4\times4\times4}$, d'où l'on déduit cette analogie 2 : 16 :: 2 × 2 × 2 : 4 × 4 × 4 :: 8 : 64. Donc, &c. C. Q. F. D.

AUTRE DÉM. Ces 4 nombres en progression géométrique fournissent ces 3 analogies :

1°. 2 : 4 :: 2 : 4
2°. 4 : 8 :: 2 : 4 } Si on les multiplie terme
3°. 8 : 16 :: 2 : 4

par terme, on aura 2 × 4 × 8 : 4 × 8 × 16 :: 2 × 2 × 2 : 4 × 4 × 4, ou 2 : 16 :: 8 : 64. Donc, &c. C. Q. F. D.

On fait usage de cette proposition, en Géométrie, pour construire un cube double, triple, &c. d'un cube donné, ou en général pour former un cube qui soit à un cube donné dans un rapport quelconque; elle fournit aussi la solution du problême suivant.

225. PROB. Trouver entre deux nombres donnés, 8 & 125, deux moyens géométriques continus.

SOLUTION. J'exprime par x & par y ces deux nombres, & j'agis comme s'ils étoient connus. J'ai donc cette progression géométrique de 4 termes ∺ 8, x, y, 125; ce qui donne (224) 8 : 125 :: 8 × 8 × 8 : x^3, cube du premier moyen géométrique. Si l'on fait le produit des extrêmes & celui des moyens, on aura $x^3 = 125 \times 8 \times 8 = 8000$; tirant la racine cube de part & d'autre,

on

on aura $x = 20$, premier moyen géométrique. Pour trouver le second y, je fais cette analogie $8 : 20 :: 20 : y = \frac{400}{8} = 50$. Les deux moyens géométriques entre 8 & 125 sont donc 20 & 50. En effet, on a ∺ 8 : 20, 50, 125 ; on voit que chaque nombre est les $\frac{2}{5}$ du suivant. C. Q. F. Dét.

On voit par cette solution, que pour trouver deux nombres moyens géométriques entre deux nombres donnés, il faut multiplier le quarré du premier nombre par le second nombre donné, tirer la racine cube du produit : cette racine sera la valeur du premier moyen, dont le quarré divisé par le premier nombre, donne le second moyen géométrique. C. Q. F. B. R.

226. THÉOR. Dans toute proportion géométrique, 1°. le premier terme est à la moitié du premier plus ou moins le second, comme le troisieme est à la moitié du 3e plus ou moins le 4e.

2°. Le premier est au second, comme la moitié du premier plus ou moins le 3e est à la moitié du second plus ou moins le 4e.

3°. En général, le premier terme est à une partie quelconque du premier terme plus ou moins le second, comme le 3e est à la même partie correspondante du 3e plus ou moins le 4e.

Si on a $24 : 6 :: 8 : 2$, *à démontrer*,

1°. que $\begin{cases} 24 : \frac{24}{2} + 6 = 18 :: 8 : \frac{8}{2} + 2 = 6 \\ 24 : \frac{24}{2} - 6 = 6 :: 8 : \frac{8}{2} - 2 = 2 \end{cases}$

2°. que $\begin{cases} 24 : 6 :: \frac{24}{2} + 8 = 20 : \frac{6}{2} + 2 = 5 \\ 24 : 6 :: \frac{24}{2} - 8 = 4 : \frac{6}{2} - 2 = 1 \end{cases}$

DÉM. 1°. Puisque $24 : 6 :: 8 : 2$, on aura, en alternant, $24 : 8 :: 6 : 2$, d'où $\frac{24}{2} : \frac{8}{2} :: 6 : 2$, & (212) $\frac{24}{2} \pm 6 : \frac{8}{2} \pm 2 :: 6 : 2$; donc en rap-

ports égaux, on aura $24 : 8 :: \frac{24}{2} \pm 6 : \frac{8}{2} \pm 2$, & alternant $24 : \frac{24}{2} \pm 6 :: 8 : \frac{8}{2} \pm 2$. C. Q. F. 1°. D.

2°. Si on divise les termes du premier rapport de la proportion $24 : 6 :: 8 : 2$, par 2 (& il en seroit de même si on les divisoit par tout autre nombre), on aura $\frac{24}{2} : \frac{6}{2} :: 8 :: 2$, d'où (212) $\frac{24}{2} \pm 8 : \frac{6}{2} \pm 2 :: 8 : 2$; donc en rapports égaux $24 : 6 :: \frac{24}{2} \pm 8 : \frac{6}{2} \pm 2$. C. Q. F. 2°. D.

D'après ce qu'on vient de démontrer, le troisieme cas, qui n'est qu'une conséquence du premier, devient évident. C. Q. F. 3°. D.

227. THÉOR. Dans toute proportion géométrique, si un des extrêmes est le plus grand des termes de la proportion, la somme des extrêmes est plus grande que celle des moyens.

Si $12 : 3 :: 8 : 2$, *à démontrer* que $12 + 2 > 3 + 8$. Cela est vrai; mais pour le démontrer d'une maniere générale, on aura (212) $12 - 8 : 3 - 2 :: 12 : 3$; mais $12 > 3$; donc $12 - 8 > 3 - 2$. Si on ajoute de part & d'autre $8 + 2$, le résultat du plus grand nombre sera le plus grand (101); on aura donc $12 - 8 + 8 + 2 > 3 - 2 + 8 + 2$, ou ôtant du premier membre $-8 + 8$ qui se détruisent, & du second $-2 + 2$, on aura $12 + 2 > 3 + 8$. Donc, &c. C. Q. F. D.

228. THÉOR. Dans la comparaison de deux rapports géométriques inégaux, 1°. si le premier est le plus grand, le produit des extrêmes est plus grand que celui des moyens; au contraire, le produit des moyens sera plus grand que celui des extrêmes, si le premier rapport est le plus petit; 2°. Si l'on fait les quarrés, les cubes, &c. des termes de ces rapports, les quarrés, les cubes des termes du premier rapport forment un rapport plus grand que celui des quarrés,

t rapport.

e,

3×3×3.

le de part &

1×3. on

& effaçant les

2×3 > 3×2

$\frac{45}{2×2} > \frac{3×5}{5}$ &

le quarré du le

les, le quarré du

sera plus grand que

×8 : 2×2 / 3×3 :

> 9×9×9 : 3×3×3.

proportion comme

re du terme moyen

mes & quarré de la dif-

proportion arithmé-

tique du 1er terme au

du 2e au 3e.

4, 7, 10, dont la diffé-

– 3 : 4 + 3 : 4 + 3 + 3

arré du terme moyen 7 =

2×4×3 + 3×3 = 7×7 =

s extrêmes 4, & 10 = 4 + 3

2×4×3 = 40 ; or ce nombre

r le précédent du produit 3×3 =

de la différence 3, qui regne dans

O 4

cette proportion continue arithmétique; donc, &c. C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisque le produit des extrêmes 4×10 est plus petit que le quarré 7×7 du terme moyen, on aura $4 \times 10 < 7 \times 7$: si on divise de part & d'autre par 10×7, on aura (106) $\frac{4 \times 10}{10 \times 7} < \frac{7 \times 7}{10 \times 7}$, & effaçant les nombres qui se détruisent, on aura $\frac{4}{7} < \frac{7}{10}$; d'où $4 : 7 < 7 : 10$. C. Q. F. 2°. D.

230. On fait usage des proportions dans toutes les parties de Mathématiques ; il faudroit des volumes pour développer toutes leurs propriétés. Ceux qui auront bien conçu celles qu'on vient d'établir, ne seront point arrêtés dans la suite, & saisiront sans peines tout ce qu'ils trouveront écrit sur cette matiere. Avant d'exposer les propriétés des progressions Arithmétiques & Géométriques, il est bon de traiter des différentes Regles, de Trois, de Compagnie, d'Intérêt, d'Escompte, d'Alliage, de Fausses-Positions, &c. qui sont d'un usage journalier dans le militaire, la finance & le commerce. Toutes ces différentes Regles sont déduites des proportions.

DE LA REGLE DE TROIS,

SIMPLE ET DIRECTE.

231. DÉF. LA Regle de Trois simple & directe, enseigne à déterminer le quatrieme terme d'une proportion géométrique directe, dont trois termes sont connus.

Parmi ces trois termes connus, deux au moins sont de même espece; le 3e dépend d'un de ces

deux termes de même espece, ou lui est relatif, & il est de même nature que le 4e, qu'on cherche : par conséquent ce quatrieme terme dépend aussi de l'autre de ces deux nombres connus, qui sont de même espece, ou lui est relatif.

Regle générale. Le premier terme de la proportion est toujours celui des deux de même espece, qui a son terme relatif connu; ce terme relatif & l'autre forment les moyens : l'inconnu, qu'on désigne par x ou par z, est le 4e terme de la proportion. Il est égal (207) au produit des moyens, divisé par le premier terme.

Pour faciliter la pratique de la regle de Trois, on regarde les deux termes connus de même espece comme *deux causes*, celui qui est seul & l'inconnu comme leurs *effets*; ou bien les deux connus de même espece sont regardés comme deux *effets*, celui qui est seul & le 4e comme leurs *causes*; par exemple, 60 hommes ont fait 84 toises de tranchée, combien 100 hommes en feront-ils ? On voit que 60 hommes sont la premiere cause; que les 84^t de tranchée en sont l'effet; que les 100 hommes sont la seconde cause, & que les toises de tranchée que ces 100 hommes doivent faire en sont l'effet demandé; ainsi, si on exprime par x le terme qu'on veut déterminer, & si on se rappelle (111) que les causes sont proportionnelles à leurs effets, on aura cette proportion,

$60^h : 84^t :: 100^h : x = \frac{8400}{60} = 140$ toises; ce qui indique que ces 100 hommes feront 140 toises de tranchée. C. Q. F. Dét.

Il peut arriver que dans les trois termes connus, deux soient *effets* & un *cause*; dans ce cas, l'effet dont la cause est connue, est le premier

terme de la proportion, sa cause, le second; l'autre effet, le troisieme, & sa cause inconnue, le 4e terme; par exemple, on demande par combien d'hommes 84 toises de tranchée seront faites, si 100 hommes en ont fait 140. On voit que les 140 toises sont l'effet de la cause 100 hommes, & que les 84 toises doivent être l'effet de la cause cherchée, savoir, le nombre d'hommes capable de les faire, la circonstance du tems étant la même; on dira donc:

$140^t : 100^h :: 84^t : z^h = \frac{8400}{140} = 60^h$; ce qui est en même tems la preuve du premier exemple. C. Q. F. B. R.

DE LA REGLE DE TROIS,

SIMPLE ET INVERSE.

232. DÉF. LA Regle de Trois est *indirecte* ou *inverse*; lorsque par l'état de la question on reconnoît que dans les trois termes donnés, les deux termes connus de même espece sont réciproques au terme qui est seul, & à celui qu'on cherche. Dans ce cas, le terme qui est seul, forme le premier terme de la proportion, & les deux autres, les moyens. On reconnoît que les deux termes connus de même espece, sont réciproques au terme qui est seul & à celui qu'on cherche, toutes les fois que ces deux termes de même espece connus, doivent produire le même effet, ou avoir la même cause ou une pareille, que le terme qui est seul & le terme inconnu.

Par exemple, 8 hommes, dans 15 jours ont

creusé un puits, dans combien de jours 24 hommes creuseront-ils un pareil puits ?

On voit que ces 8 hommes dans 15 jours ont fait le même ouvrage que les 24 hommes doivent faire dans le nombre de jours qu'on cherche, ainsi 8 hommes & 15 jours sont réciproques aux 24 hommes & aux jours x qu'ils doivent employer à creuser un pareil puits. On fera donc cette analogie.

$24^h : 8^h :: 15^j : x^j = \frac{120}{24} = 5$ jours (208). Ces 24 hommes creuseront donc ce puits dans 5 jours ; cela est clair : car un nombre triple d'hommes doit faire le même ouvrage dans un tems trois fois plus court. C. Q. F. D.

233. REMARQUE. Il est plus facile de déterminer le terme inconnu de la regle de Trois inverse, en formant une équation de l'état de la question. Par exemple, 300 hommes ont vécu 45 jours des vivres d'un magasin, on demande dans combien de jours 400 hommes consommeront une même quantité de vivres. Il est clair que 45 fois 300 hommes ont consommé le magasin de vivres, ou $45^h \times 300 = 13500^h$; car 300 hommes dans 45 jours ne consommeront pas plus de vivres que 45 fois 300 hommes dans un jour. Il n'est pas moins clair que 400 hommes, multipliés par le nombre de jours x que l'on cherche, doivent consommer la même quantité de vivres ; on aura donc cette équation $400 \times x = 13500$, d'où, divisant de part & d'autre par 400, on aura $x = 33$ jours $\frac{3}{4}$ de jour, c'est-à-dire, que dans 33 jours $\frac{3}{4}$ de jour les 400 hommes consommeront les vivres du magasin. Ainsi de toute autre regle de Trois inverse. C. Q. F. B. R.

DE LA REGLE DE TROIS,

COMPOSÉE, DIRECTE ET INVERSE.

234. DÉF. LA Regle de Trois eſt dite complexe ou compoſée, lorſqu'elle renferme 5 ou 7, ou 9, ou 11 termes, &c. & qu'il s'agit de déterminer le 6ᵉ, le 8ᵉ, le 10ᵉ ou le 12ᵉ terme, &c.

Dans chacune de ces queſtions, on y reconnoît deux cauſes & un effet donnés, & un effet inconnu, ou deux effets & une cauſe connus, & une cauſe qu'on cherche ; ce qui fait qu'il n'y a, proprement parlant, que trois termes donnés, & qu'il s'agit d'en déterminer un 4ᵉ ; c'eſt pourquoi la queſtion conſerve le nom de *Regle de Trois.*

Si les termes, qui forment une cauſe & l'effet relatif connus, ſont réciproques à ceux qui forment la cauſe, qui eſt ſeule, & l'effet qu'il s'agit de déterminer, ou s'ils doivent produire le même réſultat, la regle de Trois compoſée eſt inverſe; ſinon elle eſt directe. L'une & l'autre ſe réſolvent comme les regles de Trois ſimples, obſervant de prendre pour chaque cauſe le produit des termes de la queſtion qui la forment, & pour chaque effet le produit des termes qui le forment ; ce que la nature de la queſtion fait connoître. Un exemple de chacune de ces regles compoſées, directes & inverſes éclaircira ceci.

235. *Premier exemple de Regle de Trois compoſée directe.*

12 hommes, dans 8 jours, travaillant 9 heures par jour, ont fait 180 toiſes de maçonnerie,

combien, 15 hommes dans 5 jours, travaillant 10 heures par jour, en feront-ils?

On reconnoît par l'état de la question, que 12^h 8^j & 9^{heures} font la cause de l'effet 180^t de maçonnerie, & que 12 hommes dans 8 jours ne font pas plus d'ouvrage que 8 fois 12 hommes dans un jour, ou 96 hommes; & que 96 hommes dans 9 heures ne font pas plus d'ouvrage que 9 fois 96 hommes dans une heure, ou 864 hommes; ainsi la premiere cause est $12 \times 8 \times 9 = 864$, & son effet 180 toises: par la même raison, la seconde cause est le produit de $15^h \times 5^j \times 10^{heures} = 750$; mais il est clair (111) que la premiere cause est à son effet connu, comme la seconde cause est à son effet qu'on cherche. On aura donc cette analogie,

$$\overset{1^{ere}\text{ cause.}}{12 \times 8 \times 9 = 864} : \overset{1^{er}\text{ effet.}}{180^t} :: \overset{2^e\text{ cause.}}{15 \times 5 \times 10 = 750} : \overset{2^e\text{ effet.}}{x^t}.$$

d'où (207) $x = \frac{180 \times 750}{864} = 156^t\ 1^{Pi}\ 6^{Po}.$, c'est-à-dire que 15 hommes dans 5 jours, travaillant 10 heures par jour, feront $156^t\ 1^{Pi}\ 6^{Po}$. de maçonnerie. C. Q. F. Dét.

236. Pour abréger le calcul dans les regles de Trois, on réduit les 2 termes de même espece à leur plus simple expression; pour cet effet, on les divise par leur plus grand commun diviseur (122). Dans cet exemple, on divise les causes 864 & 750 par 6; elles deviennent 144 & 125, & l'analogie ci-dessus devient

$$144 : 180^t :: 125 : x = \frac{180 \times 125}{144} = 165^t\ 1^{Pi}\ 6^{Po}.$$

La raison en est, qu'en divisant les antécédens ou les termes d'un rapport par une même quantité, les résultats sont en proportion, & les deux

autres termes restent les mêmes (217); ainsi le résultat qui donne le terme qu'on cherche, reste le même. C. Q. F. B. R.

237. *Second exemple de regle de Trois composée directe.*

On sait que 12 hommes, dans 8 jours, travaillant 9 heures par jour, ont fait 180^t de maçonnerie; on demande dans combien de jours 15 hommes, travaillant 10 heures par jour, feront $156^t\frac{1}{4}$.

SOLUTION. On voit par l'état de la question, que les deux effets sont donnés avec une cause, & qu'il n'y a d'inconnue qu'une partie de la seconde cause, savoir, le nombre de jours que les 15 hommes mettront à faire le second effet $156^t\frac{1}{4}$. On l'exprimera par x^j, & on agira comme si cette seconde cause étoit entiérement connue. On aura donc cette analogie,

$$\underset{1^{ere}\text{ cause.}}{12\times8\times9} : \underset{1^{er}\text{ effet.}}{180^t} :: \underset{2^e\text{ cause.}}{15\times10\times x^j} : \underset{2^e\text{ effet.}}{156^t\tfrac{1}{4}} :$$

Divisant, pour abréger le calcul, les termes du premier rapport par 36, on aura cette nouvelle proportion $24 : 5 :: 15\times10\times x^j : 156^t\frac{1}{4}$ (217). Si on considere tous les termes comme des nombres abstraits, excepté les jours, & qu'on divise le produit des extrêmes $24\times156\frac{1}{4} = 3750$, par ce qu'il y a de connu dans les moyens, c'est-à-dire, par $5\times15\times10 = 750$, on aura $x = \frac{3750}{750}$ $= 5$ jours. Donc ces 15 hommes, travaillant 10 heures par jour, emploieront 5 jours à faire $156^t\ 1^{pi}\ 6^{po}$ de maçonnerie. Ainsi de toute autre.

De cet exemple, on doit conclure que toutes les fois que la qnantité inconnue x fait partie

d'un des termes de la proportion, il n'y a qu'à former une équation du produit des extrêmes & decelui des moyens, & divifer les deux membres de l'équation par ce qui multiplie l'inconnue x; le quotient donnera fa valeur. C. Q. F. B. R.

238. *Premier exemple de Regle de Trois compofée inverfe.*

300 hommes ont vécu 53 jours des vivres d'un magafin, à raifon de 38 onces de pain par jour; on voudroit que 450 hommes vécuffent 40 jours d'une pareille quantité de vivres: combien auront-ils chacun d'onces de pain par jour?

SOLUTION. On voit par l'état de la queftion, que $300^{h} \times 53^{j} \times 38^{onces}$ ont confommé les vivres du magafin, & que $450^{h} \times 40^{j} \times x^{onces}$ doivent confommer une pareille quantité de vivres; on aura donc cette équation $300 \times 53 \times 38 = 450 \times 40 \times x$, ou $604200 = 18000x$; d'où $x = 33$ onces $\frac{102}{180}$ d'once; ainfi chaque homme aura 33 onces $\frac{102}{180}$ ou $\frac{17}{30}$ d'once de pain à manger par jour. On a trouvé la valeur de la quantité inconnue x fans faire de proportion. Si on en veut faire une, on dira, en général, la partie connue de la caufe inconnue, eft à la partie de même efpece de la caufe connue, comme la partie de cette caufe connue de même efpece que l'inconnue, eft à l'inconnue x; dans cet exemple on dira:

$450^{h} \times 40^{j} : 300^{h} \times 53^{j} :: 38^{onces} : x = 33^{onces} \frac{17}{30}$. C. Q. F. Dét. & B. R.

239. *Second exemple de regle de Trois compofée & inverfe.*

On a pavé une falle avec des carreaux de 8 pouces de longueur fur 6 de large, on en a employé 2000; on demande combien il en faudroit

de 10 pouces de longueur ſur 7 pouces de largeur pour paver une pareille ſalle.

SOLUTION. Si on exprime par x le nombre des carreaux cherchés, on formera de l'état de la queſtion cette équation, $2000 \times 8 \times 6 = x \times 10 \times 7$, puiſque chaque membre de cette équation doit produre le même effet (ſavoir le carrelage d'un même ſallon); ainſi diviſant de part & d'autre par $10 \times 7 = 70$, on aura $x = \frac{2000 \times 8 \times 6}{70} = 1371 \frac{3}{7}$; c'eſt-à-dire, qu'il faudra 1371 carreaux & $\frac{3}{7}$ d'un carreau pour paver la même ſalle, chaque carreau ayant 10 pouces de longueur ſur 7 pouces de largeur. C. Q. F. Dét.

240. *Troiſieme exemple.* Il faut 2000 carreaux de 8 pouces de long ſur 6 pouces de large pour carreler une ſalle de 60 pieds de longueur & de 40 pieds de largeur; on demande combien il faudra de carreaux de 10 pouces de longueur ſur 7 pouces de largeur pour carreler une ſalle de 42 pieds de longueur ſur 30 pieds de largeur.

SOLUTION. En ſuivant l'état de la queſtion, on voit que la premiere cauſe eſt $2000 \times 8 \times 6$, & ſon effet eſt la ſurface de la ſalle $60^{pi} \times 40^{pi}$; que la ſeconde cauſe eſt le nombre de carreaux de 10 pouces de longueur ſur 7 de largeur pour carreler la ſeconde ſalle, ou ſa ſurface $42^{pi} \times 30^{pi}$; cette ſeconde cauſe eſt donc $x \times 10 \times 7$, & ſon effet 42×30. On aura donc cette analogie (111):

$2000 \times 8 \times 6 : 60 \times 40 :: x \times 10 \times 7 : 42 \times 30$; d'où (237) $60 \times 40 \times x \times 10 \times 7 = 2000 \times 8 \times 6 \times 42 \times 30$, & $x = \frac{2000 \times 8 \times 6 \times 42 \times 30}{60 \times 40 \times 10 \times 7} = 720$; ainſi il faudra 720 carreaux de 10 pouces de longueur ſur 7 de largeur pour carreler une ſalle de 42 pieds de long ſur 30 de large. C. Q. F. Dét.

241. *Quatrieme exemple de Regle de Trois inverse.*

Avec 5 aunes $\frac{3}{7}$ de drap, de $\frac{4}{5}$ de largeur, on a fait un manteau ; on demande combien il faudra d'aunes de $\frac{4}{9}$ de largeur pour faire un pareil manteau.

SOLUTION. On voit par l'état de la question, que les 5 aunes $\frac{3}{7}$ multipliées par la largeur $\frac{4}{5}$, ont produit le manteau, & que la largeur $\frac{4}{9}$, multipliée par la quantité d'aunes x, qu'on cherche, doit produire un pareil manteau. Voilà donc deux causes égales, dont l'une est connue & l'autre seulement en partie ; donc (232) $\frac{4}{9} : \frac{4}{5} :: 5^{\text{aun.}} \frac{3}{7} = \frac{38}{7} : x$, d'où $x = \frac{38}{7} \times \frac{4}{5} * \frac{4}{9} = 9^{\text{aun.}} + \frac{27}{35}$. Il faudra donc 9 aunes & $\frac{27}{35}$ d'aune de drap de $\frac{4}{9}$ de largeur pour faire un pareil manteau.

AUTRE SOLUTION. En formant de l'état de la question une équation, on aura $\frac{4}{9} \times x = 5\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{152}{35}$; divisant de part & d'autre par $\frac{4}{9}$, on aura $x = \frac{152}{35} * \frac{4}{9} = \frac{1368}{140} = 9$ aunes $\frac{108}{140} = 9^{\text{aun.}} \frac{27}{35}$, comme ci-dessus. C. Q. F. Dét.

242. *Exemple de Regle de Trois à onze termes.*

On sait que 30 hommes, dans 9 jours, travaillant 7 heures par jour, ont fait un fossé de 60 toises de longueur, 10 pieds de profondeur & 15 pieds de largeur ; on demande combien il faudra employer d'hommes pour creuser un fossé de 80^{t} de longueur, de 11 pieds de profondeur & 18 pieds de largeur dans 8 jours, travaillant 13 heures par jour.

SOLUTION. On exprimera le nombre inconnu d'hommes par x. On disposera la regle en causes & en effets, selon l'état de la question, regardant tous les termes qui les composent comme des nombres abstraits, excepté les hommes. On aura :

1ere cause. 1er effet, fossé fait. 2e cause. 2e effet, fossé à faire.
$30^h \times 9 \times 7 : 60 \times 10 \times 15 :: x^h \times 8 \times 13 : 80 \times 11 \times 18$,
ou (217), simplifiant l'expression en divisant les termes du premier rapport par 90, & ceux du second par 8, on aura :
$21 : 100 :: 13x : 10 \times 11 \times 18 = 1980$, d'où (237)
$x = 31^h \frac{118}{130}$ d'homme; & comme il n'y a pas de fraction d'homme, on conclura qu'il faudra 32 hommes pour faire le fossé demandé. C. Q. F. Dét.

Après ces exemples, on ne trouvera plus de difficultés dans les Regles de Trois simples & composées, directes ou inverses.

DE LA REGLE DE COMPAGNIE, *OU DE SOCIÉTÉ.*

243. DÉF. LA Regle de Compagnie enseigne à distribuer un gain ou une perte à deux ou à plusieurs associés, proportionnellement à ce que chacun a mis de fonds dans la société; ou en général, c'est diviser un nombre en parties proportionnelles aux parties d'un nombre donné.

Nous allons donc commencer par enseigner à diviser un nombre en parties proportionnelles aux parties d'un nombre donné.

244. PROB. Diviser un nombre quelconque 72, en parties proportionnelles aux parties 4, 5 & 3 d'un nombre donné 12.

SOLUTION. J'exprime les parties que je cherche par x, y & z, & j'observe que le nombre donné 12, est au nombre proposé 72, comme chaque partie 4, 5 & 3 du nombre donné 12, est à la partie correspondante x, y & z du nombre proposé 72. On aura donc ces 3 analogies :

$$\left.\begin{array}{l} 12 : 72 :: 4 : x = \frac{72 \times 4}{12} = 24 \\ 12 : 72 :: 5 : y = \frac{72 \times 5}{12} = 30 \\ 12 : 72 :: 3 : z = \frac{72 \times 3}{12} = 18 \end{array}\right\} \text{d'où } x + y + z = 24 + 30 + 18 = 72.$$

On a donc divisé 72 en trois parties 24, 30 & 18, qui sont entr'elles comme les 3 parties 4, 5, 3 du nombre donné 12. On voit évidemment que 4 : 24 :: 5 : 30 :: 3 : 18 ; chaque partie du nombre 12 n'est que la 6e partie de la partie correspondante du nombre proposé 72, de même que le nombre donné 12 n'est que la 6e partie du nombre proposé 72. C. Q. F. Dét. & B. R.

AUTRE DÉM. Il s'agit de faire voir que $x + y + z = 24 + 30 + 18 = 72$. On a trouvé par les analogies ci-dessus, 1°. que $x = \frac{72 \times 4}{12} = 24$, d'où $12x = 72 \times 4 = 24 \times 12$; 2°. que $y = \frac{72 \times 5}{12} = 30$, d'où $12y = 72 \times 5 = 12 \times 30$; 3°. que $z = \frac{72 \times 3}{12} = 18$, d'où $12z = 72 \times 3 = 12 \times 18$. Ajoutant ces 3 équations ensemble, on aura $12x + 12y + 12z = 72 \times 4 + 72 \times 5 + 72 \times 3 = 24 \times 12 + 30 \times 12 + 18 \times 12$, ou $12(x + y + z) = 72(4 + 5 + 3) = 12(24 + 30 + 18)$; divisant par 12, on aura $x + y + z = 72 = 24 + 30 + 18$. C. Q. F. D.

Passons maintenant à la maniere de faire les Regles de Compagnie.

244A. *Regle générale.* Pour déterminer ce qui revient à chaque associé, on dira : le fonds total est au gain total ou à la perte, comme le fonds de chaque particulier est à son gain ou à sa perte. On voit donc que ce qui revient à chacun des

associés est le 4e terme d'une proportion, dont le fonds total est le premier terme, le gain total le second, & le fonds de chaque particulier le 3e terme; il y a donc autant de regles de Trois à faire qu'il y a de fonds particuliers dans le fonds total de la société.

Premier exemple. Trois Officiers ont fait un fonds pour jouer dans une assemblée.

Le 1er a mis dans la société 300 louis d'or;
Le second 120
Le 3e 480
Total . . . . 900 louis d'or.

Avec ce fonds de 900 louis d'or, ils ont gagné 736 louis d'or; on demandece qu'il revient à chacun en raison de sa mise. On le trouvera en faisant les 3 regles de Trois ci-dessous.

Fonds total. Gain total. Fonds particulier.

1°. $900 : 736 :: 300 : x = 245\frac{1}{3}$ louis d'or. Gain du 1er.

2°. . . :: $120 : y = 98\frac{2}{15}$ louis d'or. Gain du 2e.

3°. . . :: $480 : z = 392\frac{8}{15}$ louis d'or. Gain du 3e.

La preuve est qu'en ajoutant ces 3 gains particuliers $245\frac{1}{3}$, $98\frac{2}{15}$ & $392\frac{8}{15}$, on a le gain total 736 louis d'or.

Si on divisoit les antécédens de ces 3 analogies par leur plus grand diviseur 60, on abrégeroit le calcul, en conservant cependant les mêmes résultats, & on auroit ces trois regles de Trois.

1°. $15 : 736 :: 5 : x = 245\frac{1}{3}$ louis d'or. Gain du 1er, comme ci-dessus.

2°. . . :: $2 : y = 98\frac{2}{15}$ louis d'or. Gain du 2e.

3°. . . :: $8 : z = 392\frac{8}{15}$ . . . . . Gain du 3e.

On

On auroit pu ſe contenter de faire les deux premieres regles de Trois, & ôter du gain total la ſomme des gains du premier & du ſecond Officiers; le reſte auroit donné le gain du 3e Officier; ainſi des autres. C. Q. F. Dét.

245. *Second exemple.* Trois Négocians ont fait ſociété pour 10 mois.

Le premier a mis 120 louis d'or, & a retiré ſes fonds au bout de 7 mois;

Le ſecond . . . 248, & a retiré ſes fonds au bout de 6 mois;

Le 3e. . . . . . . 82, & n'a retiré ſes fonds qu'au bout de 10 mois.

Ils ont gagné 1200 louis d'or; on demande ce qu'il revient à chacun, ayant égard au tems que leurs fonds ont reſté dans la ſociété.

SOLUTION. Il eſt clair que 120 louis d'or doivent gagner dans 7 mois ce que 7 fois 120 louis d'or gagnent dans un mois (ſuppoſant le tems également favorable au commerce); conſéquemment la miſe de chacun eſt le produit du tems & du fonds qu'il a mis dans la ſociété; on peut donc dire que la miſe du 1er eſt $120 \times 7 = 840$;
Celle du ſecond . . . . . $244 \times 6 = 1488$;
Celle du troiſieme . . . . $82 \times 10 = 820$:

Le fonds total ſera donc . . . . 3148.

On trouvera ce qui revient à chacun (244A) par ces 3 analogies,

1°. $3148 : 1200 :: 840 : x = 320 + \frac{640}{3148}$, gain du 1er Négociant.

2°. . : . :: $1488 : y = 567 + \frac{684}{3148}$ gain du 2e.

3°. . : . :: $820 : z = 312 + \frac{1824}{3148}$, gain du 3e.

La ſomme de ces trois gains eſt le gain total

1200 louis d'or ; ce qui prouve que le partage est bien fait & selon les conditions de la question. On voit donc que la preuve de la regle de Compagnie est que la somme des gains particuliers doit faire le gain total. C. Q. F. Dét. & B. R.

La regle de Compagnie par tems, est dite *Regle de Compagnie composée.*

246. 3ᵉ *Exemple.* Un particulier fait des fonds pour faire aller, pendant 14 mois, une manufacture, qui exige 60000ᵗᵗ d'avances ; au bout de 6 mois, il admet un associé, qui fait un fonds de 24000ᵗᵗ, qu'il emploie à un autre objet ; 3 mois après, il admet un 3ᵉ associé, qui fait un fonds de 15000ᵗᵗ pour les 5 mois restans, & qu'il emploie ailleurs. On demande ce qui revient à chacun de ces 3 associés, en raison de leurs fonds & du tems qu'ils ont resté dans la société. A la fin de la société, il y a 90000ᵗᵗ de gain.

SOLUTION. J'observe, 1°. qu'il y a eu pendant 14 mois 60000ᵗᵗ de fonds dans la société, qui ont gagné autant que 14 fois 60000ᵗᵗ dans un mois, ainsi la mise totale est 60000ᵗᵗ × 14 = 840000ᵗᵗ ; 2°. que si on ôte de la mise totale celle du second & du troisieme associés, on aura la mise du premier. Or le second a mis 24000ᵗᵗ pour 8 mois, sa mise est donc 24000ᵗᵗ × 8 = 192000ᵗᵗ. Celle du 3ᵉ est de 15000ᵗᵗ pour 5 mois = 15000ᵗᵗ × 5 = 75000ᵗᵗ. Ces deux mises étant ôtées de la mise totale 840000ᵗᵗ, il reste 573000ᵗᵗ pour celle du premier associé ; cela entendu, on trouvera ce qu'il revient à chacun par ces 3 analogies :

Mise totale. Gain total.

840000 : 50000 :: 573000 : $x = 34107 \frac{12}{84}$ gain du 1[er].
84 : 5 :: 192000 : $y = 11428 \frac{48}{84}$ gain du 2[e].
:: 75000 : $z = 4464 \frac{24}{48}$ gain du 3[e].

50000 Preuve.

Pour abréger le calcul, on s'est servi du rapport de 84 à 5, au lieu de celui de 840000 à 50000; ce qui ne change rien au 4[e] terme de chaque analogie (217). C. Q. F. Dét. & B. R.

247. 4[e] *Exemple.* On fait une remonte de 1200 chevaux, qu'on doit distribuer à trois régimens de dragons, en raison de leur force; celle du premier régiment est à celle du second comme 11 est à 8; celle du premier régiment est à celle du 3[e] comme 9 est à 7. On demande combien chaque régiment aura de chevaux.

SOLUT. Pour résoudre cette question & ses semblables, je nomme x le nombre de chevaux qu'aura le 1[er] régiment, y celui du second, & z le nombre de chevaux du 3[e] régiment; comme ces nombres sont dans la raison des forces de ces régimens, j'aurai, par l'état de la question, ces 2 analogies,

$x : y :: 11 : 8$
$x : z :: 9 : 7$
} & multipliant les termes du 2[e] rapport de la 1[ere] analogie par 9, & ceux du second de la 2[e] analogie par 7, on aura,

$x : y :: 11 \times 9 : 8 \times 9 :: 99 : 72$
$x : z :: 9 \times 11 : 7 \times 11 :: 99 : 77$
} analogies dans lesquelles la

force du 1[er] rég. est représentée par . . 99
celle du second par 72
& celle du 3[e] par 77
} ajoutant ensemble ces forces,

on aura . . . 248 pour la somme des forces des trois régimens.

de là, l'on déduira ces trois analogies,

chev. chev.

$248 : 1200 :: 99 : x = 479 \frac{1}{31}$ chev. du 1[er] rég.

ou $31 : 150 :: 72 : y = 348 + \frac{12}{31}$ ... qu'aura le 2[e].

$:: 77 : z = 372 + \frac{18}{31}$ ... qu'aura le 3[e].

1200 Preuve.

Dans cet exemple pour que la force du premier régiment fût représentée par un même nombre dans les deux analogies, on a multiplié les termes 11 & 8 du second rapport de la premiere analogie par l'antécédent 9 du second rapport de la seconde analogie, & les termes 9 & 7 de la seconde analogie par l'antécédent 11 du second rapport de la premiere analogie. On a aussi divisé les termes du premer rapport 248 & 1200 par 8, pour abréger le calcul des 3 analogies qui donnent le nombre des chevaux que doit avoir chaque régiment. C. Q. F. B. R.

248. 5[e] *Exemple*. Une armée marche à l'ennemi sur 5 colonnes, avec 900 pieces de canon, qu'on doit distribuer à ces colonnes, en raison de leur force, & l'on fait que

la 1[ere] colonne x est à la 2[e] y comme 11 est à 10
la 1[ere] .... x est à la 3[e] z comme 9 est à 8
la 1[ere] .... x est à la 4[e] u comme 7 est à 6
la 1[ere] .... x est à la 5[e] t comme 5 est à 4

Dans chacun de ces rapports, la premiere colonne x étant représentée par un nombre différent, pour la ramener à un même nombre, on multiplie les termes de chaque rapport par le produit des nombres qui expriment la valeur de la premiere colonne x dans les autres rapports, & on aura

$x : y :: 11 : 10 :: 11 \times 9 \times 7 \times 5 : 10 \times 9 \times 7 \times 5$
$x : z :: 9 : 8 :: 9 \times 11 \times 7 \times 5 : 8 \times 11 \times 7 \times 5$
$x : u :: 7 : 6 :: 7 \times 11 \times 9 \times 5 : 6 \times 11 \times 9 \times 5$
$x : t :: 5 : 4 :: 5 \times 11 \times 9 \times 7 : 4 \times 11 \times 9 \times 7$

ainsi x est repréſentée par $11 \times 9 \times 7 \times 5 = 3465$
y . . . . par $10 \times 9 \times 7 \times 5 = 3150$
z . . . . par $8 \times 11 \times 7 \times 5 = 3080$
u . . . . par $6 \times 11 \times 9 \times 5 = 2970$
t . . . . par $4 \times 11 \times 9 \times 7 = 2772$

Somme de ces 5 colonnes 15437

Pour trouver de combien de pieces de canon chaque colonne doit être munie, on fera ces 5 analogies, ou regles de Trois,

$15437 : 900 :: 3465 : x = 202$ canons $+ \frac{226}{15437}$
$:: 3150 : y = 183$ . . . . $+ \frac{10029}{15437}$
$:: 3080 : z = 179$ . . . . $+ \frac{8777}{15437}$
$:: 2970 : u = 173$ . . . . $+ \frac{2399}{15437}$
$:: 2772 : t = 161$ . . . . $+ \frac{9443}{15437}$

Preuve 900 canons.

L'addition des reſtes donne 2 canons, dont l'un doit être donné à la ſeconde colonne y, & l'autre à la derniere t, parce qu'à ces colonnes répondent les plus grands reſtes. C. Q. F. Dét.

249. 6[e] *Exemple*. On emploie trois ouvriers pour faire un ouvrage. Le premier le feroit ſeul en 12 jours, travaillant 10 heures par jour; le ſecond dans 15 jours, travaillant 6 heures par jour, & le troiſieme dans 9 jours, travaillant 8 heures par jour: on demande, 1°. dans combien de tems ces 3 ouvriers, travaillant enſemble, feront cet ouvrage; 2°. ce que chacun en fera;

3°. ce qu'il gagnera, l'ouvrage étant payé 108^{tt}.

SOLUTION. J'obſerve que le premier ouvrier feroit ſeul la beſogne dans 12^{j} × 10 heures = 120^{h}, & $\frac{1}{120}$ de l'ouvrage dans une heure; pareillement le ſecond ouvrier feroit ſeul l'ouvrage dans 90 heures, & $\frac{1}{90}$ dans une heure; le 3e, dans 72 heures, & $\frac{1}{72}$ dans une heure; ainſi ces 3 ouvriers, travaillant enſemble, feront dans une heure $\frac{1}{120} + \frac{1}{90} + \frac{1}{72}$ de l'ouvrage. Je réduis ces fractions en 360e (126), & j'ai $\frac{3}{360} + \frac{4}{360} + \frac{5}{360} = \frac{12}{360} = \frac{1}{30}$; ces ouvriers feront donc $\frac{1}{30}$ de l'ouvrage dans une heure, par conſéquent tout l'ouvrage dans 30 heures. Or, dans ces 30 heures,

le 1er fera $\frac{3}{360} \times 30 = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ de l'ouvrage.

le 2e fera $\frac{4}{360} \times 30 = \frac{120}{360} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

le 3e fera $\frac{5}{360} \times 30 = \frac{150}{360} = \ldots \frac{5}{12}$ de l'ouvrage.

Il ne s'agit plus que de diſtribuer 108^{tt} à ces ouvriers, en raiſon de l'ouvrage que chacun a fait, ou de diviſer 108^{tt} en 3 parties qui ſoient entr'elles comme les fractions $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{12}$, ou comme leurs numérateurs 3, 4 & 5. On dira donc (244) : la ſomme 12 de ces 3 nombres eſt à 108^{tt}, comme chacun de ces nombres eſt à la partie correſpondante de 108^{tt} qu'on cherche; on fera donc ces 3 analogies,

$12 : 108^{tt} :: 3 : x = 27^{tt}$ gain du 1er ouvrier.
$1 : \;\; 9 \;\; :: 4 : y = 36$ gain du ſecond.
$:: 5 : z = 45$ gain du 3e.

Preuve 108^{tt} gain total.

On voit qu'en diviſant les termes du premier rapport par 12, on réduit les regles de Trois à de ſimples multiplications des nombres 3, 4, 5, par 9, dont les produits donnent le gain de chaque ouvrier.

On a donc satisfait à toutes les demandes du problême proposé. C. Q. F. Dét.

Ce nombre d'exemples suffit. On ajoutera que la regle de Compagnie est d'un usage très-fréquent. Elle sert aux Commerçans, aux Financiers, à ceux qui sont chargés d'asseoir & de lever des impôts, & généralement dans tous les états de la société. Il faut donc se la rendre familiere.

DE LA REGLE TESTAMENTAIRE.

250. DÉF. LA regle Testamentaire ne differe de la regle de Compagnie que par l'objet auquel on l'applique. Elle enseigne à distribuer un bien ou une somme à des héritiers, selon des conditions données par le testateur.

Par exemple. Un Seigneur laisse en mourant sa femme enceinte; les clauses de son testament sont que si elle accouche d'une fille, la mere aura les $\frac{3}{4}$ de son bien, qui est de 100000 écus, & l'enfant le quart; que si elle accouche d'un fils, la mere n'aura que le quart, & le fils les $\frac{3}{4}$: il arrive que cette Dame accouche d'un fils & d'une fille; on demande ce qu'il revient à chacun, suivant les intentions du testateur.

Il est clair qu'il a voulu que sa fille ayant 1, sa femme ait 3, triple de la part de la fille, & son fils 9, triple de la part de la mere. La somme de ces trois nombres est 13. Il s'agit donc de partager 100000 écus en trois parties proportionnelles aux parties 1, 3, 9 du nombre 13; ce que l'on fera (244) par ces 3 analogies,

1°. 13 : 100000 :: 1 : x = 7692 écus $\frac{4}{13}$, part de la fille.
2°. . . :: 3 : y = 23076 + $\frac{12}{13}$, part de la mere.
3°. . . :: 9 : z = 69230 + $\frac{10}{13}$, part du fils.

Preuve. 100000 écus. C. Q. F. Dét.

251. 2ᵉ *Exemple.* Quatre héritiers ont 12000ᴴ à partager entr'eux, de sorte que le premier, selon le testament, doit avoir les $\frac{2}{5}$, le second $\frac{1}{6}$, le 3ᵉ $\frac{4}{9}$, & le 4ᵉ $\frac{1}{3}$; on demande ce qu'il revient à chacun.

SOLUTION. Comme ces quatre fractions excedent un tout, & qu'ainsi l'on ne peut pas donner à chacun la part de l'héritage que le testateur lui a assignée, je les réduis à la même dénomination (125); j'ai $\frac{108,\ 45,\ 120,\ 90}{270}$; la somme des numérateurs est 363; il s'agit donc de diviser 12000ᴴ en 4 parties proportionnelles aux nombres 108, 45, 120 & 90; ce que l'on fera (244) par ces 3 analogies :

1°. 363 : 12000 :: 108 : x = 3570ᴴ + $\frac{30}{121}$, part du 1ᵉʳ qui a les $\frac{2}{5}$
2°. ou 121 : 4000 :: 45 : y = 1487 + $\frac{73}{121}$, ... du 2ᵉ, $\frac{1}{6}$
3°. . . :: 120 : z = 3966 + $\frac{114}{121}$, ... du 3ᵉ, $\frac{4}{9}$
4°. . . :: 90 : u = 2975 + $\frac{25}{121}$, ... du 4ᵉ, $\frac{1}{3}$

Preuve 12000. C. Q. F. Dét.

Ainsi des autres.

DE LA REGLE D'INTÉRÊT.

252. ON appelle *intérêt* l'argent qu'on retire chaque année d'une ſomme qu'on a prêtée pour toujours, ou pour un tems déterminé. 1°. On compte l'intérêt à tant pour 100, par exemple, à 4, à 5, à 6 $\frac{1}{2}$, à 10, &c. pour 100, qu'on exprime ainſi, 4, 5, 6 $\frac{1}{2}$, &c. p. $\frac{o}{o}$. Si on a prêté 100ᵗᵗ à 5 p. $\frac{o}{o}$, au bout de l'année on reçoit 5ᵗᵗ d'intérêt, ou de revenu.

2°. On compte auſſi l'intérêt *au denier tant*; ſi on prête au denier 10, 12, 15, 20, 25, 30, &c. on retire une livre à la fin de l'année pour un prêt de 10ᵗᵗ ſi c'eſt au denier 10, & une livre pour 25ᵗᵗ ſi c'eſt au denier 25; de ſorte que ſi on diviſe la ſomme prêtée quelconque 8725ᵗᵗ pour le denier de l'intérêt 25, le quotient 249ᵗᵗ eſt ce que rapporte annuellement 8725ᵗᵗ, placées au denier 25, ou, ce qui revient au même, à 4 pour 100. Pour connoître le rapport que ces deux manieres de compter l'intérêt ont entr'elles, il n'y a qu'à diviſer 100 par le denier qu'on veut comparer; ſi on veut ſavoir à combien pour 100 eſt le denier 20, on diviſera 100 par 20, le quotient 5 marque que le denier 20 eſt la même choſe que le 5 pour 100, &c.

253. Il ſuit de ce qui précede, que déterminer ce que rapporte une ſomme quelconque, placée à tant pour 100, c'eſt trouver un nombre qui contienne autant de fois l'intérêt de 100ᵗᵗ que la ſomme dont il s'agit contient de 100. Par exemple, on demande ce que rapporte une ſomme de 27560ᵗᵗ à 5 pour 100; il eſt clair que

cette somme 27560^{tt}, rapportera autant de fois 5^{tt}, qu'elle contient de fois 100^{tt}; ce qu'on déterminera par cette analogie,

$$100 : 5 :: 27560^{tt} : x = 1378^{tt}.$$

Ainsi le revenu d'une somme est égal à cette somme, multipliée par l'intérêt qu'on retire pour 100^{tt}, & divisée par 100. C. Q. F. B. R.

254. PROB. Un particulier a prêté 30000^{tt} à 4 pour 100; au bout d'un nombre d'années on lui rembourse 37400^{tt} pour capital & intérêt; on demande le nombre d'années qui s'est écoulé depuis le jour du prêt jusqu'à celui du paiement.

SOLUTION. J'observe que les 37400^{tt} renferment le capital 30000^{tt}, & l'intérêt que rend ce capital pendant les années que je cherche. J'ôte donc de ces 37400^{tt} le capital 30000^{tt}; le reste 7400 est l'intérêt des années écoulées. Pour en connoître le nombre, je détermine ce que rapporte 30000^{tt} dans un an, à 4 pour 100, par cette analogie,

$$100 : 4 :: 30000 : x = 1200^{tt},$$ intérêt d'un an.

Je divise l'intérêt total 7400^{tt} par l'intérêt 1200^{tt} d'un an; le quotient $6\frac{1}{6}$ marque qu'il s'est écoulé 6 ans 2 mois. C. Q. F. Dér.

255. PROB. Un particulier a prêté 12000^{tt}; au bout de 5 ans 4 mois on lui rend 15200^{tt}; on demande à quel intérêt p. $\frac{o}{o}$ on a prêté, ou à quel denier.

SOLUTION. Puisque le prêt est de 12000^{tt}, l'intérêt pour les 5 ans 4 mois se monte à 3200^{tt}, que je divise par 5 ans 4 mois (77); le quotient 600^{tt} est l'intérêt d'un an de 12000^{tt}. Pour savoir à combien le 100, je fais cette analogie,

$$12000 : 600^{tt} :: 100 : \frac{60000}{12000} = 5.$$

Ainsi l'emprunt est à 5 pour 100. On trouvera à quel denier est l'emprunt en divisant le capital 12000^{tt} par le revenu 600^{tt} d'une année. Le quotient 20 est le denier d'intérêt. C. Q. F. Dét. & B. R.

256. PROB. Un débiteur paie à son créancier la somme de 22200^{tt}, tant pour le capital que pour l'intérêt d'une somme qu'il a gardée 4 années & 8 mois, à raison de 5 pour 100; on demande quel est le capital?

SOLUTION. Pour résoudre cette question & ses semblables, je cherche combien rapporte 100^{tt} pendant 4 années 8 mois, à raison de 5 pour $\frac{0}{0}$; je trouve $5 \times 4\frac{2}{3} = 23^{tt}\ 6^{f}\ 8^{d}$, que j'ajoute à 100^{tt}; j'ai 123^{tt} 6^{f} 8^{d} pour le capital & l'intérêt de 100^{tt}, à 5 p. $\frac{0}{0}$ pendant 4 ans 8 mois; cela posé, je dis; si 123^{tt} 6^{f} 8^{d} viennent du capital 100^{tt}, de quel capital x, la somme 22200^{tt} vient-elle? Je trouverai donc ce capital x par cette analogie, $123^{tt}\ 6^{f}\ 8^{d} : 100 :: 22200^{tt} : x = 18000^{tt}$, capital cherché. En effet, 18000^{tt} à 5 pour 100, rapporte 900^{tt} par an, & dans 4 ans 8 mois la somme de 4200^{tt}, qui étant ajoutée au capital 18000^{tt}, donne 22200^{tt}, somme que le débiteur a payée. Donc, &c. C. Q. F. Dét.

DE LA REGLE D'ESCOMPTE.

257. L'ESCOMPTE differe du simple intérêt en ce que l'escompte d'une somme la diminue, de maniere que cette somme diminuée, mise à intérêt au taux de l'escompte pour cent, jointe à cet

intérêt, donne la ſomme propoſée; ou eſcompter à tant pour 100, c'eſt ôter d'une ſomme propoſée un nombre tel, que le reſte mis à intérêt au taux de l'eſcompte pour 100, donne un nombre qui étant joint au reſte, produit la ſomme propoſée; ainſi quand on eſcompte une ſomme quelconque à 4, à 5, à 6, à 8 ou à 10 pour 100, il faut entendre que l'on perd ſur chaque 104, 105, 106, 108, 110ᵗᵗ que la ſomme contient 4, 5, 6, 8 ou 10ᵗᵗ, ſelon le taux de l'eſcompte pour 100ᵗᵗ; ou que 104ᵗᵗ ſont réduites à 100ᵗᵗ ſi l'eſcompte eſt à 4 p. $\frac{0}{0}$, 105 à 100ᵗᵗ ſi l'eſcompte eſt à 5 p. $\frac{0}{0}$, 106 à 100ᵗᵗ s'il eſt à 6, &c.

Par exemple, un marchand achete du velours pour 17280ᵗᵗ d'un fabricant, à un an de crédit. Ce fabricant, ayant beſoin d'argent, propoſe l'eſcompte à 8 p. $\frac{0}{0}$; combien le marchand doit-il payer comptant ?

SOLUTION. Puiſque dans ce cas chaque 108 que contient 17280ᵗᵗ ſe réduiſent à 100ᵗᵗ; on trouvera à quoi ſe réduira la ſomme 17280ᵗᵗ par cette analogie,

$$108 : 100 :: 17280 : x = 16000^{tt}.$$

Ce marchand ne paiera donc que 16000ᵗᵗ. En effet, 16000ᵗᵗ placées à intérêt à 8 p. $\frac{0}{0}$, rapportent 1280ᵗᵗ, qui étant ajoutées au capital 16000ᵗᵗ, donnent la ſomme de 17280ᵗᵗ, dûe dans un an, à compter du jour de l'achat. Ainſi des autres. C. Q. F. Dét.

258. PROB. Un particulier doit 14000ᵗᵗ, à 17 mois de terme, deux mois s'étant écoulés, il propoſe à ſon créancier de le rembourſer, en lui paſſant l'eſcompte à 6 pour 100, par an. Le créancier l'accepte. A combien doit ſe réduire cette ſomme de 14000ᵗᵗ ?

SOLUTION. Comme cet efcompte porte fur 15 mois au lieu d'un an, & que fur 100ᵗᵗ pour un an ou 12 mois le créancier perd 6ᵗᵗ, on trouvera ce qu'il doit perdre pour 15 mois par cette analogie, 12 : 6 : : 15 : x = 7ᵗᵗ 10ˢ; ce qui indique que l'efcompte pour les 15 mois dont on anticipe le paiement eft de 7ᵗᵗ 10ˢ pour $\frac{0}{0}$. Ainfi pour déterminer à quoi fe réduit la fomme de 14000ᵗᵗ, on fera cette analogie, 107ᵗᵗ 10ˢ : 100 : : 14000 : x = 13023ᵗᵗ 5ˢ 1ᵈ $\frac{17}{43}$. Le créancier ne recevra donc que 13023ᵗᵗ 5ˢ 1ᵈ $\frac{17}{43}$. La preuve eft que cette fomme de 13023ᵗᵗ 5ˢ 1ᵈ $\frac{17}{43}$ placée à 6 pour 100 rapporte (253) dans 15 mois celle de 976ᵗᵗ 14ˢ 10ᵈ $\frac{26}{43}$, qui étant ajoutée au capital 13023ᵗᵗ 5ˢ 1ᵈ $\frac{17}{43}$ donne la dette 14000ᵗᵗ. Il eft bon que les commençans s'exercent à faire les calculs indiqués. C. Q. F. Dét.

DE LA REGLE DE CHANGE.

259. DÉF. LA regle de *change* eft la même que la regle d'*efcompte*. Par exemple, on demande à à un Banquier de Paris de faire payer à Rome une fomme de 6000ᵗᵗ. Il confent à donner une lettre de change de pareille fomme payable à vue ou à tel terme, moyennant 2 pour 100 de change, c'eft-à-dire, que pour chaque 100ᵗᵗ qu'on veut faire toucher à Rome on lui donne 2ᵗᵗ pour fon droit de change.

On trouvera ce qu'il faut lui donner pour les 6000ᵗᵗ par cette analogie, 100 : 2 : : 6000 : x = 120ᵗᵗ. Il faudra donc remettre au Banquier de Paris une fomme de 6120ᵗᵗ pour faire toucher

6000# à Rome à vue de la lettre de change qu'il a délivrée, tirée sur son Correspondant de Rome. Si on ne remet que 6000# au Banquier de Paris, son Correspondant de Rome retiendra la valeur du change sur les 6000#; ce qu'il paiera se trouvera par cette analogie, 102 : 100 :: 6000 : x = 5882# 7s 0d $\frac{36}{51}$ somme que le Banquier de Rome paiera. On trouvera le change ou ce que le Banquier de Rome doit retenir sur les 6000# par cette anologie,

102 : 2 :: 6000 : x = 117# 12s 11d $\frac{15}{51}$ somme à retenir. C. Q. F. Dét.

DE LA REGLE DES TROCS,

OU DES ÉCHANGES.

260. DÉF. DANS les *trocs* ou *échanges*, les Marchands vendent plus cher leurs marchandises qu'en argent comptant. Supposons que deux Marchands fassent un troc, que le premier échange du drap qu'il vend 18# l'aune, dont il veuille en troc 21#, & que le second Marchand ait du velours qu'il vend argent comptant 24#; on demande à quel prix il doit le vendre en troc pour ne rien perdre sur sa marchandise dans cet échange.

SOLUTION. On voit par l'état de cette question, que le second Marchand doit augmenter le prix de son velours dans le même rapport que le premier augmente le prix de son drap; ce qu'on trouvera par cette analogie : si 18# comptant sont portées à 21# en troc, à combien 24# comptant doivent-elles être portées, ou 18 : 21 :: 24 : x = 28# prix de l'aune de velours en troc.

261. *Autre exemple.* Un Marchand a du ſucre qu'il vend $20^{ſ}$ argent comptant & qu'il veut vendre $24^{ſ}$ en troc, exigeant le quart de ce prix $24^{ſ}$ de la livre argent comptant ; on demande à combien un Marchand doit porter le prix de la bouteille de vin de Bourgogne qu'il vend argent comptant $30^{ſ}$ pour troquer ſon vin avec le premier Marchand.

SOLUTION. Puiſque le ſecond Marchand doit payer $\frac{1}{4}$ du prix du ſucre, en argent, il ne doit payer que les $\frac{3}{4}$ en troc ou $18^{ſ}$ de chaque livre de ſucre ; on doit auſſi ôter $6^{ſ}$ de $20^{ſ}$ prix du ſucre argent comptant ; car ces $6^{ſ}$ payés comptant doivent diminuer les prix du ſucre au comptant & en troc de $6^{ſ}$. Les prix deviennent donc $14^{ſ}$ au comptant & $18^{ſ}$ en troc, après quoi il faut faire cette analogie, $14 : 18 :: 30 : x = 38^{ſ}\ 6^{d}\ \frac{6}{7}$ prix du vin en troc. Si on demandoit combien le Marchand de vin aura de livres de ſucre en troc de 1260 bouteilles de vin, & combien il doit payer comptant au Marchand de ſucre, on multipliera 1260 bouteilles par le prix en troc $38^{ſ}\ 6^{d}\ \frac{6}{7}$ de la bouteille, & on diviſera le produit $48600^{ſ}$ par le prix $18^{ſ}$ de la livre de ſucre en troc ; le quotient 2700 exprime le nombre de livres de ſucre que le Marchand de vin doit avoir pour ſes 1260 bouteilles ; mais il doit payer en outre au Marchand de ſucre argent comptant 2700 pieces de $6^{ſ}$ ou 810^{tt}. Ainſi des autres. C. Q. F. Dét.

❋

REGLE POUR TIRER LA TARE DES MARCHANDISES.

262. DÉF. On appelle *tare* ce qui sert d'emballage aux marchandises; tirer la tare des marchandises, c'est diminuer le poids total des marchandises, de celui de l'emballage au gré des Marchands. Les uns rabattent tant pour 100 ou dans le 100; les autres tant au-dessus du 100.

Par exemple, un Marchand achete 15 tonneaux d'huile pesant 14900℔, combien doit-il payer de net en rabattant 12 pour 100, ou dans le 100 pour la tare?

On dira: si 100 est réduit à 88, à combien sera réduit 14900℔? On trouvera 13112℔ net.

Si on avoit rabattu 12℔ au-dessus du 100, on auroit fait cette analogie 112 : 100 :: 14900℔ : x = 13303℔ net & $\frac{8}{14}$. On voit qu'il est plus avantageux pour l'acheteur que la tare soit dans le 100 qu'au-dessus du 100. C. Q. F. Dét.

DE LA REGLE D'ALLIAGE.

263. La regle d'*alliage* enseigne 1°. à mêler plusieurs quantités de différentes valeurs données pour en composer une d'une valeur moyenne, qu'il s'agit de déterminer.

2°. Elle enseigne à déterminer ce qu'on doit prendre de différentes quantités, dont la valeur est connue, pour en faire un tout d'une valeur moyenne donnée.

3°.

3°. Elle enseigne à déterminer les parties dont un tout est composé, lorsque la valeur de ce tout est connue, de même que celle des matieres qui le composent.

Regle générale du premier cas. Il faut ajouter les produits des unités de chaque espece par leur prix, & diviser la somme de ces produits par la somme de toutes les unités des différentes grandeurs qu'on veut mêler; le quotient sera le prix de l'unité du mêlange.

Par exemple, on propose de mêler

100 sacs de bled à 8# le sac	=	800# ;
50 sacs d'orge à 5# 10f	=	275 ;
83 sacs de seigle à 4#	=	332 ;
233, Diviseur. Somme des sacs.		1407#. Divid.

On demande le prix du sac du mêlange; il est clair qu'en divisant le prix ou la valeur de tous ces sacs par leur nombre, on aura la valeur du sac du mêlange; or, 1407# divisées par 233, donnent pour quotient 6# 0f 9d + $\frac{63}{233}$ de denier, valeur du sac du mêlange. Ainsi des autres. C. Q. F. 1°. Dét.

264. *Regle générale du second cas.* 1°. S'il n'y a que deux quantités à mêler, & qu'on connoisse leur prix particulier & celui du mêlange, la différence du prix supérieur au prix moyen donné, marque le nombre d'unités du prix inférieur qu'on doit prendre, & la différence du prix inférieur au prix moyen exprime le nombre d'unités de la quantité du prix supérieur qu'on doit prendre, pour faire ensemble autant d'unités du prix moyen qu'il y en a dans ces deux différences.

Par exemple, un marchand n'a que deux qua-

lités de vin, à 21^f & à 7^f la bouteille ; on lui en demande 1200 bouteilles à 12^f ; combien doit-il mêler de vin à 7^f avec celui à 21^f, pour en faire à 12^f la bouteille, sans tromper l'acheteur?

Je dispose la regle comme on voit :

Vin à 21^f . . . . . 5 }
Prix moyen, 12^f } 14, somme des différences.
Vin à 7^f . . . . . 9 }

J'agis comme la regle générale le prescrit: j'écris à la suite du prix inférieur 7 la différence 9 du plus haut prix 21 au prix moyen 12, & à la suite du prix supérieur 21 la différence 5 du prix inférieur 7 au prix moyen 12 ; la somme 14 de ces différences indique que pour faire 14 bouteilles de vin à 12^f, il en faut 5 à 21^f & 9 à 7^f ; ce qui est vrai ; car sur chaque bouteille à 21^f qu'on donne à 12^f, on perd 9^f ; sur les 5 bouteilles, on perd 45^f ; & sur chaque bouteille à 7^f qu'on vend 12^f, on gagne 5^f, sur les 9 bouteilles on gagne 45^f ; ainsi la perte qu'on fait sur le vin à 21^f est égale au gain qu'on fait sur le vin à 7^f. Donc ce mêlange est juste, & la regle générale exacte. Mais on veut 1200 bouteilles à 12^f, au lieu de 14 bouteilles, on trouvera combien il en faut prendre à 21^f & à 7^f par ces deux analogies.

$14 : 1200 :: 5 : x = 428\frac{8}{14}$ bouteilles de vin à 21^f.
$:: 9 : y = 771\frac{6}{14}$ bouteilles de vin à 7^f.

Preuve 1200 bouteilles à 12^f.

2°. Lorsqu'il y a plus de deux quantités à mêler, la différence du prix moyen à l'un des prix supérieurs, choisi à volonté, se met à la suite

d'un prix inférieur, & la différence de ce prix inférieur au prix moyen s'écrit à la suite du prix supérieur qu'on a choisi. Ces différences expriment le nombre d'unités de chaque prix qu'on doit prendre pour le nombre d'unités du prix moyen, égal à la somme des différences, quand elles ont été toutes prises & comparées.

Par exemple, on veut mêler de la poudre à 15ˢ, à 21ˢ, à 29ˢ la livre, pour en faire de la poudre à 20ˢ.

Je dispose la regle ainsi,

Poudre à 29ˢ	5	20, somme des differ.
21	5	
Prix moyen 20ˢ . . .		
15	9+1	

J'écris la différence 9, du prix supérieur 29 au prix moyen 20, à la suite du prix inférieur 15; j'écris aussi la différence 1 du prix supérieur 21ˢ au prix moyen 20, à la suite du même prix inférieur 15, parce qu'il est seul au-dessous du prix moyen 20ˢ; & j'écris à la suite des deux nombres supérieurs 29 & 21 la différence 5 du prix inférieur 15ˢ au prix moyen 20. J'ajoute ces différences. La somme 20 indique que pour faire 20 livres de poudre à 20 sols la livre, il en faut prendre 5℔ à 29ˢ, autant à 21ˢ & 10℔ à 15ˢ. Si on en vouloit un nombre déterminé, comme 200℔, on feroit autant d'analogies qu'il y a de différence, comme dans l'exemple ci-dessus. La preuve que ce mêlange est exact, c'est qu'on gagne sur 10℔ de poudre à 15ˢ qu'on vend 20ˢ, ce qu'on perd sur 5℔ de poudre à 29ˢ qu'on donne à 20ˢ, & sur 5℔ de poudre à 21ˢ qu'on donne à 20ˢ; d'une part on gagne 50ˢ, de l'autre on les perd Donc, &c. C. Q. F. D.

Autre Exemple. Un commerçant a du vin à 23^{f}, à 19^{f}, à 15^{f}, à 8^{f} & à 5^{f} la pinte. On lui demande 2000 pintes de vin à 12^{f}, & on exige qu'il faſſe un mêlange de ces cinq qualités de vin; de ſorte qu'il y ait 4 fois autant de vin à 15^{f} qu'à 19^{f} : combien faut-il de pintes de chaque qualité pour que le commerçant ne gagne ni ne perde à ce mêlange ?

SOLUTION. J'obſerve, 1°. que 4 pintes à 15^{f} & une pinte à 19^{f} font 5 pintes, qui valent enſemble 79^{f}, dont la 5e partie $15^{f}\frac{4}{5}$ de ſol eſt la valeur de la pinte de ce mêlange (263). Il ne s'agit donc plus que de mêler du vin à 23^{f}, à $15^{f}\frac{4}{5}$, à 8^{f} & à 5^{f}, pour en faire à 12^{f}. J'opere comme on voit & comme on l'a expoſé dans l'exemple ci-deſſus.

$$\left.\begin{array}{lcl} 23^{f} & \ldots\ldots & 7 \\ 15\frac{4}{5} & \ldots\ldots & 4 \\ \ldots & 12^{f} & \ldots \\ 8 & \ldots\ldots & 3\frac{4}{5} \\ 5 & \ldots\ldots & 11 \end{array}\right\} 25\tfrac{4}{5}, \text{ ſomme des différences.}$$

Pour trouver combien il faut prendre de chaque ſorte de vin pour compoſer les 2000 pintes demandées, on fera les 4 analogies ſuivantes,

$$\begin{array}{lrll} & & \text{nombre de pintes} & \\ 25\frac{4}{5} : 2000, \text{ou } 129 : 10000 :: & 7 & : x = 542\frac{82}{129} & \text{à } 23^{f} \\ & :: 4 & : y = 310\frac{10}{129} & \text{à } 15^{f}\frac{4}{5} \\ & :: 3\frac{4}{5} & : z = 294\frac{74}{129} & \text{à } 8^{f} \\ & :: 11 & : u = 852\frac{92}{129} & \text{à } 5^{f} \\ \text{Preuve. Nombre demandé} & & \overline{\quad 2000 \quad} & \text{à } 12^{f}. \end{array}$$

Obſervons que dans cette regle & dans les ſemblables, la queſtion eſt ſuſceptible de plus

d'une ſolution : car on pouvoit mettre la différence 11 du plus haut prix au prix moyen vis-à-vis le prix 8^f, & conſéquemment celle 4 de ces 8^f au prix moyen vis-à-vis le plus fort prix 23 ; alors la différence $3\frac{4}{5}$ auroit répondu au prix 5^f, & celle 7 au prix $15^f\frac{4}{5}$.

265. *Regle générale du* 3e *cas*. 1°. Si le tout eſt compoſé de deux matieres, dont la valeur de chacune ſoit connue, de même que celle du tout, on agira comme dans le ſecond cas. Les différences donneront les parties dont le tout eſt compoſé.

Par exemple, on ſait que du vin à 12^f la bouteille eſt fait du mêlange de vins à 21^f & à 8^f la bouteille : on demande combien il y a de parties de chacun de ces vins dans la bouteille de vin à 21^f.

vin à 12^f	4	
Prix moyen 12^f		13, ſomme des différenc.
à 8^f	9	

Si on regarde la ſomme 13 des différences comme un tout compoſé de 13 parties, ces différences 4 & 9 indiquent qu'il faut $\frac{4}{13}$ de vin à 21^f & $\frac{9}{13}$ à 8^f pour former une bouteille à 12^f; en effet, $\frac{4}{13}$ de bouteille à 21^f valent $6^f\frac{6}{13}$ de ſol, & $\frac{9}{13}$ de bouteille de 8^f valent 5^f & $\frac{7}{13}$; or $6+\frac{6}{13}+5+\frac{7}{13}=12^f$; donc, &c. C. Q. F. Dét.

2°. Lorſque le tout propoſé eſt compoſé de plus de deux matieres différentes, la queſtion devient indéterminée, ou ſuſceptible de pluſieurs ſolutions.

Par exemple, on ſait que du vin à 12^f la bouteille eſt fait du mêlange de 4 ſortes de vin à 21^f,

à 19ˢ, à 10ˢ & à 7ˢ la pinte. Combien y en a-t-il de chaque espece ?

vin à 21ˢ	5	2		
19	2	5		
Prix moyen 12ˢ		ou	23, somme des différences.	
10	7	9		
7	9	7		

La premiere combinaison indique que $\frac{5}{23}$ à 21ˢ, $\frac{2}{23}$ à 19ˢ, $\frac{7}{23}$ à 10ˢ & $\frac{9}{23}$ à 7ˢ, font un tout à 12ˢ.

La seconde combinaison désigne que $\frac{2}{23}$ à 21ˢ, $\frac{5}{23}$ à 19ˢ, $\frac{9}{23}$ à 10ˢ & $\frac{7}{23}$ à 7ˢ font un tout à 12ˢ. L'une & l'autre de ces solutions sont exactes; cependant le mêlange n'est qu'un, & n'est peut-être ni l'un ni l'autre; car en le faisant, on pouvoit varier les conditions d'une infinité de manieres; par exemple, exiger qu'il y ait 4 fois autant de vin à 7ˢ qu'à 10, 3 fois autant à 19ˢ qu'à 21 &c. C. Q. F. D. & B. R.

266. On détermine ces questions d'une maniere plus générale & plus géométrique, à l'aide des équations; on en forme autant qu'il y a de quantités différentes à mêler.

Reprenons l'exemple du mêlange de poudre à 15ˢ, à 21ˢ & à 29ˢ, pour en faire à 20ˢ la livre. On aura par l'état de la question ces 3 équations, après avoir fait 29ˢ $= a$, 21 $= b$, 15 $= c$, & le prix moyen 20ˢ $= m$.

1°. $a - 9 = m$
2°. $b - 1 = m$
3°. $c + 5 = m$

Il faut faire disparoître les nombres 9, 1 & 5 de ces 3 équations; ce qui se fait en multipliant la premiere par 5, & la 3ᵉ par 9; la seconde par 5, & la 3ᵉ par 1; on aura,

1°. $5a - 45 = 5m$ } Ajoutant ces 2 équations,
$9c + 45 = 9m$ } on a $5a + 9c = 14m$;
2°. $5b - 5 = 5m$ } Ajoutant ces 2 équations,
$c + 5 = m$ } on a $5b + c = 6m$.

Si on ajoute les deux équations résultantes $5a + 9c = 14m$, & $5b + c = 6m$, on aura $5a + 5b + 10c = 20m$; on voit donc que pour faire 20 livres de poudre à 20 sols, il en faut prendre 5 ℔ à 29ˢ, 5 ℔ à 21ˢ, & 10 ℔ à 15ˢ, ou que pour en faire une livre il en faut prendre $\frac{5}{20}$ ou $\frac{1}{4}$ à 20ˢ, autant à 21ˢ & $\frac{10}{20}$, ou une moitié à 15ˢ; ce qui confirme ce qu'on a trouvé n°. 264. C. Q. F. Dét.

267. PROB. Des hommes, des femmes & des enfans sont à un spectacle. Les hommes paient 24 sols, les femmes 18 sols & les enfans 6 sols; le Directeur du spectacle n'a reçu que 60 ᵗᵗ, il y avoit 60 personnes: on demande combien il y avoit d'hommes, de femmes & d'enfans. Soit

le prix de chaque homme $24^s = h$ } Le prix moyen
celui de chaque femme $18^s = f$ } $20^s = m$; on
celui de chaque enfant . . $6^s = e$ } aura,

1°. $h - 4 = m$ } Combinant la premiere
2°. $f + 2 = m$ } équation avec les deux
3°. $e + 14 = m$ } autres séparément, en faisant disparoître les nombres 4, 2 & 14, on aura,

1°. $2h - 8 = 2m$ } d'où $2h + 4f = 6m$
$4f + 8 = 4m$ } ou $8h + 16f = 24m$.
2°. $14h - 56 = 14m$ } d'où $14h + 4e = 18m$
$4e + 56 = 4m$ } ou $28h + 8e = 36m$.

d'où ajoutant ces deux équations, on aura

$36h + 16f + 8e = 60m$; il y avoit donc, selon cette premiere combinaison, 36 hommes, 16 femmes & 8 enfans : cela est vrai ;

car $36\,h$	à $1^{tt}\ 4^{f}$	=	$43^{tt}\ 4^{f}$
$16\,f$	à 18^{f}	=	$14^{tt}\ 8^{f}$
$8\,e$	à 6^{f}	=	$2^{tt}\ 8^{f}$
60 personnes		&	60^{tt} Preuve.

On auroit en triplant l'équation $14h + 4e = 14m$; $42h + 12e = 54m$, qui étant ajoutée avec l'équation $2h + 4f = 6m$, donne $44h + 4f + 12e = 60m$: autre solution. On en trouveroit plusieurs autres en combinant de plusieurs manieres ces équations ; ce qui rend le problême indéterminé ou susceptible de plusieurs solutions. C. Q. F. Dét. & B. R.

268. PROB. Un particulier reçoit 40 sols en pieces de 2 sols & de 18 deniers : il compte le nombre de ces pieces, il en trouve 22 : on demande combien il y a de chacune de ces pieces ?

SOLUTION. Puisque ces 22 pieces valent 40 sols ; si on les suppose de même valeur, chacune vaudra $\frac{40}{22} = 1^{f}\ 9^{d}\frac{9}{11} = 21^{d}\frac{9}{11} = m$ valeur moyenne ; si on exprime chaque piece de 2 sols par a, chaque piece de 18 deniers par b, on aura ces deux équations,

$1^{o}.\ a - 2\frac{2}{11} = m$
$2^{o}.\ b + 3\frac{9}{11} = m$

Multipliant la premiere équation par $3\frac{9}{11} = \frac{42}{11}$, & la 2e par $2\frac{2}{11} = \frac{24}{11}$, on aura

$1^{o}.\ \frac{42}{11}a - \frac{24}{11} \times \frac{24}{11} = \frac{42}{11}m$
$2^{o}.\ \frac{24}{11}b + \frac{24}{11} \times \frac{42}{11} = \frac{42}{11}m$

Ajoutant ces deux équations, on aura $\frac{42}{11}a + \frac{24}{11}b = \frac{66}{11}m$, d'où faisant disparoître le diviseur 11, $42a + 24b = 66m$; prenant le tiers de chaque terme,

on aura $14a + 8b = 22m = 40$ sols. Il y a donc 14 pieces de 2 sols, qui valent 28 sols, & 8 pieces de 18 deniers, qui valent 12 sols; or $28^{s} + 12^{s} = 40^{s}$; donc, &c. C. Q. F. Dét.

269. AUTRE SOLUTION. Si je regarde les 22 pieces comme des pieces de 18 deniers, elles ne vaudront que 33 sols que j'ôte de 40 sols, il reste 7 sols qui ne peuvent se trouver qu'en substituant des pieces de 2 sols à la place d'un certain nombre de celles de 18 deniers; cela posé, j'observe qu'en prenant une piece de 2 sols pour une de 18 deniers, je gagne 6 deniers. Je dois donc mettre autant de pieces de 2 sols que 6 deniers sont contenus de fois dans les 7 sols, c'est-à-dire, 14, qui ôté de 22 pieces, il reste 8 pieces; il y a donc 14 pieces de 2 sols & 8 de 18 deniers comme ci-dessus. On déduit de cette solution ce principe: si on multiplie la valeur de la petite piece par le nombre des pieces; qu'on ôte le produit de la somme demandée, & qu'on divise le reste par la différence de la petite piece à la grande, le quotient donnera le nombre des grandes pieces qui entre dans le mêlange; d'où l'ôtant du nombre total des pieces, le reste sera le nombre des petites pieces. C. Q. F. Dét. & B. R.

270. PROB. Une couronne du poids de 96 onces est composée d'un mêlange d'or & d'argent; on propose de déterminer combien il y a de ces métaux.

SOLUTION. Pour résoudre ce problême & ses semblables, il faut être prévenu de ce principe d'hydrostatique; 1°. que tout corps pesé dans l'eau perd de son poids une quantité égale au

poids du volume d'eau dont il occupe la place; 2°. que l'expérience fait connoître que l'or pesé dans l'eau perd de son poids, une quantité représentée par le quotient de son poids hors de l'eau, divisé par 12,387 ; que l'argent perd le quotient de son poids, divisé par 10,378. Cela posé, on fera peser la couronne dans l'eau; je suppose qu'elle perde 8 onces ou $\frac{1}{12}$ de son poids, un même poids d'or perdroit $\frac{96}{12,387}$; ou $7\frac{3}{4}$, & 96 onces d'argent perdroient $\frac{96}{10,378}$, ou 9 onces $\frac{1}{4}$. Si on regarde ces pertes comme les différentes parties du poids que perdent la couronne & les deux métaux dont elle est composée, la question se réduira à faire avec deux matieres, dont l'une perd 7 onces $\frac{3}{4}$ sur 96 onces, & l'autre 6 onces $\frac{1}{4}$ sur le même poids, un mêlange de même poids qui fasse une perte moyenne de 8 onces. C'est donc par une regle d'alliage qu'on déterminera ce qu'il faut prendre de chacune des ces matieres.

Pour résoudre la question, j'opere comme on voit ci-dessous,

	différence.	
Perte de l'or . . 7 onc. $\frac{3}{4}$	. $1\frac{1}{4}$	
Perte de la couronne 8 onces		1 on. $\frac{1}{2}$, somme
Perte de l'argent 9 onc. $\frac{1}{4}$ . . .	$\frac{1}{4}$	des différences.

C'est-à-dire, que pour faire 1 once $\frac{1}{2}$ de la matiere de la couronne, il faut 1 once $\frac{1}{4}$ d'or, & $\frac{1}{4}$ d'once d'argent; on trouvera donc combien il y a d'or & d'argent dans la couronne par ces deux analogies ou regles de trois.

1°. $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} :: 96 : x = 80$ onces, or contenu dans la couronne.

2°. $1\frac{1}{2} : \frac{1}{4} :: 96 : y = 16$ onces, argent contenu dans la couron.

Pour que ce mêlange ſoit exact, il faut que la perte que font 80 onces d'or peſées dans l'eau, jointe à celle que les 16 onces d'argent y font, égale la perte 8 onces que la couronne fait ; on trouvera ces deux pertes à l'aide de ces deux regles de trois.

$$96 : 7\tfrac{3}{4} :: 80 : \tfrac{80}{96} \times 7\tfrac{3}{4} = 6\tfrac{11}{24}$$

$$96 : 9\tfrac{1}{4} :: 16 : \tfrac{16}{96} \times 9\tfrac{1}{4} = 1\tfrac{13}{24}$$

8 onces, ſomme des pertes, égale à celle de la couronne.

Donc la ſolution eſt exacte. C. Q. F. Dér. & P.

On déterminera de la même maniere combien il y a de cuivre ou de roſette, & d'étain dans une piece d'artillerie.

DE LA REGLE CONJOINTE.

271. DÉF. CETTE regle eſt un abrégé de pluſieurs regles de trois, qu'on ſeroit obligé de faire pour réſoudre une queſtion propoſée.

Regle générale. On diſpoſe en deux colonnes, tous les termes des égalités qui ſont propoſées, en antécédens & en conſéquens, obſervant que l'antécédent ſuivant ſoit de même nom que le conſéquent qui le précede immédiatement ; & que le dernier conſéquent ſoit de même nom que le premier antécédent. Le terme inconnu eſt toujours ou le dernier antécédent ou le dernier conſéquent. On l'exprime par x ; on forme une équation, dont le premier membre eſt le produit des antécédens ; & le ſecond membre eſt le

produit des conséquens. Dans cette équation on détermine l'inconnue x, en divisant les deux membres de l'équation par ce qui multiplie cette inconnue ; le résultat est sa valeur (114).

Premier Exemple.

$100^{L.}$	de Venise pesent	$70^{L.}$	de Lyon,
120	de Lyon	100	de Rouen,
80	de Rouen . . .	100	de Toulouse,
50	de Toulouse . .	37	de Genève,
x	de Genève . . .	109	de Venise,

c'est-à-dire qu'on demande combien $100^{L.}$ de Venise valent de livres de Genève. On aura donc, selon la regle générale, cette équation $100 \times 120 \times 80 \times 50 \times x = 70 \times 100 \times 100 \times 37 \times 100$; si on divise les deux membres de l'équation par ce qui multiplie x, on aura,

$$x = \frac{70 \times 100 \times 100 \times 37 \times 100}{100 \times 120 \times 80 \times 50} = \frac{7 \times 10 \times 37 \times 10}{12 \times 8 \times 5} = \frac{25900}{480}$$

$= 53^{L.} \frac{23}{24}$; ainsi $100^{L.}$ de Venise ne pesent que $53^{L.} \frac{23}{24}$ de livre de Genève. C. Q. F. Dét.

Second Exemple.

10 écus de France valent 800 den. d'Hollande.
83 den. d'Hollande . . . 48 den. d'Angleterre.
24 den. d'Angleterre . . 42 den. de Hambourg.
128 den. de Hambourg . . 2 duc. de Francfort.
ombien 105 ducats de Francfort valent-ils d'écus x de France ?

En suivant la regle générale, on aura cette équation, $10 \times 83 \times 24 \times 128 \times 105 = 800 \times 48 \times 42 \times 2 \times x$, d'où $x = \frac{10 \times 83 \times 24 \times 128 \times 105}{800 \times 48 \times 42 \times 2}$ $= \frac{83 \times 8 \times 35}{5 \times 2 \times 14 \times 2} = 83$ écus de France ; ainsi 105

ducats de Francfort valent 83 écus de France. Ainsi de toutes les autres questions de cette espece. C. Q. F. Dét.

272. *Démonstration de la méthode générale pour la solution des regles conjointes.*

Reprenons le second Exemple.

Soit un écu de France exprimé par a,
un denier d'Hollande par . . . . b,
le denier d'Angleterre par . . . . c,
celui de Hambourg par . . . . d,
le ducat de Francfort par . . . . f,

on aura, en suivant l'état de la question, ces équations,

1°. $10a = 800b$, d'où (208) $a:b::800:10$
2°. $83b = 48c$ . . . . $b:c::48:83$
3°. $24c = 42d$ . . . . $c:d::42:24$
4°. $128d = 2f$ . . . . $d:f::2:128$
5°. $105f = xa$ . . . . $f:a::x:105$

Si on multiplie ces proportions terme par terme, il est clair que les produits seront en proportion (218).

On aura donc $a \times b \times c \times d \times f : b \times c \times d \times f \times a :: 800 \times 48 \times 42 \times 2 \times x : 10 \times 83 \times 24 \times 128 \times 105$. Mais les termes du premier rapport sont égaux; donc ceux du second le sont aussi. On a donc l'équation que fournit la regle générale, savoir,

$800 \times 48 \times 42 \times 2 \times x = 10 \times 83 \times 24 \times 128 \times 105$; donc cette regle générale est exacte. C. Q. F. D.

❋

DE LA REGLE DE FAUSSE POSITION

SIMPLE ET DOUBLE.

273. DÉF. LA regle de *fausse position simple* ne differe pas de la regle testamentaire (250). Il ne s'agit que de diviser un nombre selon les conditions données.

274. DÉF. La regle de fausse position est double, lorsque pour résoudre une question, on est obligé de faire deux suppositions, prenant des nombres au hasard pour les vrais, & qui, en suivant l'état de la question, conduisent à un résultat plus grand ou plus petit que le vrai; ce qui fournit deux erreurs, à l'aide desquelles on détermine le vrai nombre qu'on cherche de la maniere qui suit.

Regle générale. Si le nombre qu'on a choisi donne un résultat trop petit, il faut l'écrire à part, & ce qui manque à la suite avec le signe *moins* —; s'il donne un résultat trop grand, on écrit l'excès avec le signe *plus* +.

On fait la même chose à l'égard du second nombre qu'on a supposé être le vrai; on l'écrit sous le premier, & la seconde erreur sous la premiere, avec le signe *moins* ou *plus*, selon que cette seconde erreur est en *moins* ou en *plus*; cela fait, on multiplie le premier nombre supposé par la seconde erreur, & le second nombre supposé par la premiere erreur. Si les erreurs ont des signes différens, on ajoute les deux produits & on en divise la somme par celle des erreurs; le quotient donne le nombre cherché. Si les erreurs ont le même

ſigne, on ôte le plus petit produit du grand, & on diviſe le reſte par la différence des erreurs; le quotient eſt le vrai nombre cherché.

Exemple. On propoſe de partager 36₶ entre trois perſonnes, de ſorte que la ſeconde ait le triple de la premiere, plus 4₶, & la troiſieme autant que les deux autres, moins 2₶.

Si on ſuppoſe que la premiere perſonne

ait . . . . 1₶ } 1ere ſupp.
la 2e aura . . . 7₶
la 3e . . . . . . 6 } 1₶ . . — 22 1ere erreur.
14

2e ſupp. la 1ere a 6₶ } 2e ſupp.
la ſeconde . . . 22 } 6₶ . . + 18 2e erreur.
la 3e . . . . . . 26 } 1er prod. 1×18 = 18
54 } 2e prod. 6×22 = 132
ſomme des prod. 150

La premiere ſuppoſition donne 14 pour réſultat au lieu de 36, l'erreur eſt donc de 22 en moins qu'on écrit comme on voit; la 2e ſuppoſition donne 54 au lieu de 36, l'erreur eſt donc de 18 en plus; ainſi ayant multiplié les ſuppoſitions par les erreurs, ſelon la regle générale, on ajoute leurs produits 18 & 132, parce que les erreurs ont des ſignes différens, & on diviſe leur ſomme 150 par la ſomme des erreurs 18 + 22 = 40; le quotient $3\frac{3}{4}$ eſt la part de la premiere perſonne; celle de la ſeconde perſonne eſt $13\frac{9}{4} = 15\frac{1}{4}$, & celle de la troiſieme $14\frac{12}{4} = 17$; cela eſt vrai, car ces trois nombres $3\frac{3}{4}$, $15\frac{1}{4}$ & 17 ſatisfont aux conditions de la queſtion, & font enſemble 36₶; ainſi des autres. C. Q. F. D.

275. *Démonstration de la regle générale qu'on vient d'établir pour la regle de Fausse-Position double.*

PREMIER CAS : *lorsque les signes sont différens.*

La premiere supposition donne pour les parts des 3 personnes,

1ere 2e 3e 1ere erreur en moins.

$1 + 7 + 6 = 36 - 22$

la 2e supposition donne pour les 3 parts.

2e erreur en plus.

$6 + 22 + 26 = 36 + 18.$

Si on multiplie la premiere équation par la seconde erreur 18, & la seconde équation par la premiere erreur 22, on aura,

$1^o.\ 18 + 126 + 108 = 36 \times 18 - 22 \times 18$
$2^o.\ 132 + 484 + 572 = 36 \times 22 + 22 \times 18$

Ajoutant terme à terme ces deux équations, les produits des erreurs disparoissent, & on aura cette équation, $150 + 610 + 680 = 36 \times 40$; mais le second membre n'est autre chose que le nombre proposé 36 pris 18 fois plus 22 fois, ou 40 fois, nombre de fois que donne la somme des erreurs $-$ 22 & 18. Donc pour réduire les trois parts, qui forment le premier membre de l'équation, à la valeur qu'elles doivent avoir d'après l'état de la question, il faut diviser l'équation par 40, somme des erreurs 22 & 18, & l'on aura $\frac{150}{40} + \frac{610}{40} + \frac{680}{40} = 36$ ou $3\frac{3}{4} + 15\frac{1}{4} + 17 = 36$ (1ere, 2e, 3e part.), comme on a trouvé ci-dessus. C. Q. F. 1°. D.

SECOND

SECOND CAS : *lorsque les signes sont les mêmes.*

2°. Si la 1ère supp. est 1ère 1 + 2e 7 + 3e part. 6 = 36 — 22 1ere err. en moins;

& que la 2e supp. soit 2 + 10 + 10 = 36 — 14 2e erreur en moins.

& qu'on multiplie la premiere équation par la seconde erreur 14, & la seconde équation par la premiere erreur, on aura

1°. $14 + 98 + 84 = 36 \times 14 - 22 \times 14$ }
2°. $44 + 220 + 220 = 36 \times 22 - 22 \times 14$ } Si on ôte terme par terme la 1ere équation de la seconde, on aura $30 + 122 + 136 = 36 \times 8$; or on vient d'ôter 14 fois 36 de 22 fois 36, le reste est donc 8 fois 36; donc si on divise cette équation $30 + 122 + 136 = 36 \times 8$ par 8, différence des erreurs 22 & 14, on réduira les parts à leurs justes valeurs, & on aura comme ci-dessus $3\frac{3}{4} + 15\frac{1}{4} + 17 = 36^{tt}$, donc la regle générale est exacte dans les deux cas. C. Q. F. 2°. D.

276. REMARQUE. Il est plus expéditif & plus élégant de résoudre cette question & ses semblables par une équation qu'on déduit de la question, que par deux fausses positions. Reprenons la même question. J'exprime la part de la premiere personne par l'inconnue x;
celle de la seconde sera donc $3x + 4$,
& celle de la troisieme . . . $4x + 2$;

somme des parts $8x + 6$; mais ces 3 parts doivent former ensemble la somme de 36^{tt}; on aura donc cette équation, $8x + 6 = 36$ ou $8x = 30$. Divisant de part & d'autre par 8, on aura $x = 3\frac{3}{4}$ pour la part de la premiere per-

ſonne ; celle de la ſeconde ſera $15\frac{1}{4}$, & celle de la 3e 17, comme on l'a trouvé par la regle générale de fauſſe poſition double. On déterminera, avec la même facilité toutes les regles de fauſſe poſition double par des équations formées de l'état de la queſtion.

277. PROB. Pour obliger un ouvrier de travailler journellement, on lui donne 20 ſols chaque jour qu'il travaille, & on lui retient 8 ſols chaque jour qu'il ne travaille pas. Il arrive qu'au bout de 40 jours, il lui eſt dû 17^{tt} $12^f = 352^f$; déterminer combien de jours il n'a pas travaillé.

PREMIERE SOLUTION. Si on exprime par x le nombre de jours qu'il n'a point travaillé, & qu'on faſſe attention, 1°. que chacun de ces jours-là il fait une perte de 28^f, ſavoir 20^f qu'il omet de gagner & 8^f qu'on lui retient ; 2°. que s'il eût travaillé tous les jours, il auroit gagné $40^{tt} = 800^f$, on aura cette équation $800^f - 28x = 352^f$, d'où $448 = 28x$; diviſant de part & d'autre par 28, on aura $x = 16$, c'eſt-à-dire, que cet ouvrier a perdu 16 journées & qu'il n'a travaillé que 24 jours. La preuve eſt que 24 journées à 20 ſols font 24^{tt}, d'où ôtant 16 fois 8 ſols ou 6^{tt} 8^f qu'on lui retient pour les 16 jours qu'il n'a pas travaillé, il reſte 17^{tt} 12^f pour le gain qu'il a fait dans ſes 40 jours ſelon les conditions de ce marché. C. Q. F. 1°. Dét.

SECONDE SOLUTION *par la regle de fauſſe poſition double.*

Suppoſons qu'il ait travaillé 20 jours, qui à 20^f font 20^{tt} ; il a donc omis de travailler 20 jours, qui à 8^f de perte chacun, font 8^{tt} : par cette ſuppoſition il ne lui eſt donc dû que 12^{tt} au lieu de 17^{tt} 12^f, l'erreur eſt donc 5^{tt} 12^f en moins.

Supposons en second lieu qu'il ait travaillé 30 jours, qui à 20^{f} font 30^{tt}; il a donc omis de travailler 10 jours, qui à 8 sols chacun font 4^{tt}; ôtant ces 4^{tt} de 30^{tt}, son gain se trouvera être 26^{tt}, au lieu de 17^{tt} 12^{f}, l'erreur est donc 8^{tt} 8^{f} en plus.

On aura donc

1ere supp... 20...	1ere erreur en moins —5^{tt} 12^{f}	}	14^{tt}, somme des erreurs.
2e supp... 30...	2e erreur en plus. +8^{tt} 8^{f}		

La somme des produits est $20 \times 8^{tt}\ 8^{f} + 30 \times 5^{tt}\ 12^{f} = 336^{tt}$, qui étant divisées par la somme 14^{tt} des erreurs, comme l'indique la regle générale (274), le quotient 24 exprime le nombre de jours que l'ouvrier a travaillé; il n'a donc point travaillé pendant 16 jours, comme on l'a trouvé par l'équation déduite de l'état de la question dans la premiere solution. C. Q. F. Dét.

278. On peut regarder ce qui précede comme un traité d'arithmétique universelle, utile à tous les hommes, dans tel genre d'emplois qu'ils puissent se trouver. Ce que nous allons écrire concerne plus particuliérement le Géometre, le Physicien & le Mathématicien en général. Pour ne pas être arrêté, il est bon de se rendre familier ce qu'on a écrit (87), sur les quantités négatives, sur les quatre regles d'algebre (88 à 97), sur les équations (112), sur les puissances & l'extraction des racines (163 à 192), sur les rapports & proportions (194 à 230).



DES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

279. DÉF. UNE ſuite de nombres ou de grandeurs qui ſe ſurpaſſent de la même quantité, forme une progreſſion arithmétique, qui a pour différence la quantité dont chaque terme ſurpaſſe celui qui le ſuit, ou en eſt ſurpaſſé (10).

Si les termes vont en augmentant, la progreſſion arith. eſt croiſſante, comme ÷ 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, &c. dont la différence eſt 3.

Si les termes vont en diminuant, elle eſt décroiſſante, comme ÷ 26, 21, 16, 11, 6, 1, &c. dont la différence eſt 5.

Pour généraliſer les propriétés des progreſſions arithmétiques, on exprimera le premier terme par a, la différence par p, le dernier terme par g, la ſomme de tous les termes par s, & le nombre des termes par n, le nombre des termes moins un ſera $(n\text{-}1)$. Les termes intermédiaires s'exprimeront par les lettres b, c, d, f, &c. écrites au-deſſus ou au-deſſous de chaque nombre que ces caracteres repréſenteront, comme on verra ci-après.

280. On déduit de la nature de la progreſſion arithmétique croiſſante,

1°. Que chaque terme égale le premier, plus le produit de la différence par le nombre des termes qui le précedent. Ainſi, le 20e terme égale le premier plus 19 fois la différence; $a + 19p$ eſt le vingtieme terme, *& le dernier terme égale le premier plus le produit de la différence par le nombre des termes moins un*, $g = a + p \times (n - 1)$ eſt l'expreſſion du dernier terme : par conſéquent, connoiſſant le premier terme & la différence, on peut

ſuivre la progreſſion auſſi loin qu'on voudra, car le ſecond terme égale le premier plus une fois la différence, le 3e égale le premier plus 2 fois la différence, le 20e égale le premier plus 19 fois la différence, &c. L'expreſſion générale d'une progreſſion arith. croiſſante ſera donc $\div a, a+p, a+2p, a+3p$ &c. . . . . g.

Celle de la décroiſſante ſera $\div a, a-p, a-2p, a-3p, a-4p$, &c. . . . g.

2°. On en déduit auſſi qu'entre deux termes quelconques il y a autant de fois la différence plus un, qu'il y a de termes intermédiaires; en effet, entre le premier terme a & le 20e, $a+19p$, il y a 19 fois la différence p (c'eſt-à-dire que le 20e terme ſurpaſſe le premier terme de 19 fois la différence); & il n'y a que 18 termes intermédiaires entre ces deux termes. Donc *pour introduire entre deux termes tant de moyens arithmétiques qu'on voudra, il faut ôter le petit du grand, & diviſer le reſte par le nombre de moyens arithmétiques plus un; le quotient ſera la valeur de la différence, qui étant ajoutée au petit terme, donnera le premier moyen arithmétique; & ajoutant ſucceſſivement cette différence, on les aura tous.* Si on veut 5 moyens arith. entre 2 & 20, on ôtera 2 de 20, on diviſera le reſte 18 par 6, nombre des moyens arithm. plus un, le quotient 3 ſera la différence, & les 5 moyens arith. ſeront 2 + 3, 8, 11, 14, 17, conſéquemment on aura cette progreſſion arithmétique,

$$\div 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 = g,$$

ou $\div a, a+p, a+2p, a+3p, a+4p, a+5p, a+6p=g$.

3°. Puiſque le dernier terme $g = a + p \times (n-1)$, contient le premier terme, plus le produit de la différence par le nombre de termes

moins un, on aura (113) $a = g - p(n - 1)$; ce qui indique que *le premier terme égale le dernier moins le produit de la différence par le nombre des termes moins un.*

4°. De l'équation $g = a + p \times (n - 1)$, on déduit (113 & 114), que $p = \frac{g - a}{n - 1}$. *La différence* p *est donc égale à la différence du premier terme au dernier, divisée par le nombre des termes moins un.* On en déduit aussi que $n - 1 = \frac{g - a}{p}$, c'est-à-dire que *le nombre des termes moins un, égale la différence du dernier terme au premier, divisée par la différence* p, *qui regne dans la progression.* C. Q. F. R.

281. THÉOR. Dans toute progression arithmétique croissante, 1°. la somme des extrêmes égale celle de deux termes également éloignés des extrêmes; 2°. la somme de tous les termes égale celle des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, ou le nombre des termes multiplié par la moitié de la somme des extrêmes.

3°. La somme des extrêmes égale la somme de tous les termes divisée par la moitié du nombre des termes, & cette somme des extrêmes égale deux fois le premier terme, plus le produit de la différence par le nombre des termes moins un.

Soit cette prog. arith. $\div a, b, c, d, f, g$ / $\div 2, 5, 8, 11, 14, 17$ } dont la diff. est $3 = p$.

DÉM. Par la nature de la progression arithmétique, on aura (280),

1er terme	$2 = 2$	ou $a = a$
2e . . .	$5 = 2 + 3 \times 1$ . . .	$b = a + p$
3e . . .	$8 = 2 + 3 \times 2$ . . .	$c = a + 2p$
4e . . .	$11 = 2 + 3 \times 3$ . . .	$d = a + 3p$
5e . . .	$14 = 2 + 3 \times 4$ . . .	$f = a + 4p$
6e & dern.	$17 = 2 + 3 \times 5$ . . .	$g = a + 5p = a + p \times (n - 1)$

Si on ajoute d'une part les extrêmes & de l'autre leur valeur, qu'on ajoute aussi d'une part deux termes, également éloignés des extrêmes, & de l'autre leur valeur, on aura,

$2+17=2+2+3\times5$
ou $a+g=2a+5p=2a+p\times(n-1)$
$5+14=2+2+3\times(1+4)$
ou $b+f=2a+5p=2a+p\times(n-1)$
$8+11=2+2+3\times(2+3)$,
ou $c+d=2a+5p=2a+p\times(n-1)$.

Donc la somme des extrêmes $2+17=a+g$ est égale à la somme de deux termes également éloignés des extrêmes, $5+14=b+f$, $8+11=c+d$, puisque chacune de ces quantités ou de ces sommes égale $2+2+3\times5=2a+p(n\text{-}1)$; donc $a+g=b+f=c+d$. C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisque ces 3 grandeurs égales $a+g$, $b+f$, $c+d$ renferment tous les termes de la progression arith., on aura leur somme en multipliant une de ces grandeurs $a+g$, somme des extrêmes par $3=\frac{1}{2}n$, moitié du nombre des termes ; donc la somme de tous les termes $s=(a+g)\times\frac{1}{2}n$, ou $s=(2+17)\times3=2+5+8+11+14+17=57$ dans l'exemple proposé; donc aussi $s=\frac{a+g}{2}\times n$; ce qui indique que la somme de tous les termes est égale à la moitié de la somme des extrêmes multipliée par le nombre des termes; donc, &c. C. Q. F. 2° D.

3°. Si on divise la somme de tous les termes $s=(a+g)\frac{1}{2}n$ par la moitié du nombre des termes $\frac{1}{2}n$, on aura la somme des extrêmes $a+g=\frac{s}{\frac{1}{2}n}$; mais le dernier terme $g=a+p\times$

$(n-1)$; donc en ſubſtituant (115), on aura

$a+g=2a+p\times(n-1)=\frac{s}{\frac{1}{2}n}=\frac{2s}{n}$, c'eſt-à-dire, que ſi on diviſe le double de la ſomme de tous les termes par le nombre des termes, on aura la ſomme des extrêmes, de laquelle ôtant le produit de la différence par le nombre des termes moins un, on aura le double du 1er terme. dans cet exemple $s=57$, $2s=114$, $n=6$; le quotient de 114 diviſé par 6 eſt 19, ſomme des extrêmes, d'où ôtant $3\times5=15$, produit de la différence 3 par 5, nombre des termes moins un, on aura 4 double du premier terme 2. Donc, &c. C. Q. F. 3°. Dét.

282. On déduit de ce qui précede les formules ſuivantes :

1ere formule $s=(a+g)\times\frac{1}{2}n$;

2e . . . . . $g=a+p\times(n-1)$;

3e . . . . . $a=g-p\times(n-1)$,

4e . . . . . $p=\frac{g-a}{n-1}$;

5e . . . . . $n-1=\frac{g-a}{p}$; d'où

6e . . . . . $n=\frac{g-a}{p}+1=\frac{g-a+p}{p}$;

7e . . . . . $a+g=\frac{s}{\frac{1}{2}n}=\frac{2s}{n}$; d'où

8^{e} . . . . . $a=\frac{2s}{n}-g$; &

9e . . . . . $g=\frac{2s}{n}-a$;

Comparant les deux valeurs de g, on aura $\frac{2s}{n}-a=a+p\times(n-1)$; tranſpoſant a, multipliant par n & diviſant par 2, on aura (113, 114 & 115) cette 10e formule,

$$s=\frac{2an+pn^2-pn}{2}.$$

Comparant de même les valeurs de a, tirées des équations ou formules 3e & 8e, on aura $\frac{s2}{n} - g = g - p \times (n - 1)$; transposant g, multipliant par n & divisant par 2, on aura cette 11e formule, $s = \frac{2gn - pn^2 + pn}{2}$;

Si on multiplie cette formule par 2, qu'on transpose & qu'on divise par p, on aura $n^2 - \frac{2gn - pn}{p} = - \frac{2s}{p}$; si on ajoute de part & d'autre $\frac{4g^2 + 4gp + p^2}{4p^2}$ quarré de $\frac{-2g - p}{2p}$, moitié du coëfficient de n, le 1er membre sera un quarré parfait, & on aura $n^2 - \frac{2gn - pn}{p} + \frac{4g^2 + 4pg + p^2}{4p^2} = \frac{4g^2 + 4gp + p^2}{4p^2} - \frac{2s}{p} = \frac{4g^2 + 4pg + p^2 - 8ps}{4p^2}$, tirant la racine quarrée on aura $n - \frac{2g - p}{2p} = \sqrt{\frac{4g^2 + 4pg + p^2 - 8ps}{4p^2}}$; transposant, on trouvera cette 12e formule:

$$n = \frac{-2g + p}{2p} \pm \sqrt{\frac{4g^2 + 4pg + p^2 - 8ps}{4p^2}} = \frac{2g + p}{2p} \pm \sqrt{\frac{g^2 + pg + \frac{1}{4}p^2 - 2ps}{p^2}}.$$

Par un semblable procédé, on déduit de la 10e formule $s = \frac{2an + pn^2 - pn}{2}$ cette 13e formule, $n = - \frac{2a + p}{2p} \pm \sqrt{\frac{4a^2 - 4ap + p^2 + 8ps}{4p^2}} = - \frac{2a + p}{2p} \pm \sqrt{\frac{a^2 - ap + \frac{1}{4}p^2 + 2ps}{p^2}}.$

De la 10e formule, on déduit encore les deux suivantes.

14^e $p = \frac{2s - 2an}{n^2 - n}$.

15e $a = \frac{2s - pn^2 + pn}{2n}$.

La 11e formule fournit aussi les deux suivantes,

16e $p = \frac{2gn - 2s}{n^2 - n}$;

17e $g = \frac{2s + pn^2 - pn}{2n}$.

Les valeurs de n tirées des formules 6e & 11e donnent $\frac{g - a + p}{p} = \frac{2g + p}{2p} \pm \sqrt{\frac{g^2 + pg + \frac{1}{4}p^2 - 2ps}{p^2}}$; multipliant par p, on aura $g - a + p = g + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{g^2 + pg + \frac{1}{4}p^2 - 2ps}$; si on change les signes, corrige & transpose, on aura cette 18e formule,

$a = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{g^2 + pg + \frac{1}{4}p^2 - 2ps}$;

Par un semblable procédé, les valeurs de n tirées des formules 6e & 13e donnent cette 19e formule, $g = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{a^2 - ap + \frac{1}{4}p^2 + 2ps}$;

Chacune de ces formules donne la solution d'une question sur les progressions arithmétiques; *par exemple*, on a distribué aux pauvres pendant un certain nombre de jours 57 écus en progression arith. augmentant chaque jour de 3 écus; on a donné le premier jour 2 écus, combien a-t-on donné le dernier jour, & pendant combien de jours? La 19e formule $g = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{a^2 - ap + \frac{1}{4}p^2 + 2ps}$ donne la valeur de ce qu'on a distribué le dernier jour exprimé par g; car dans ce cas $a = 2$, $p = 3$, $s = 57$, substituant, on aura $g = -\frac{3}{2} + \sqrt{4 - 6 + \frac{9}{4} + 342} = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1369}{4}} = -\frac{3}{2} + \frac{37}{2}$, ou $g = 17$ écus qu'on a donné le dernier jour; ou trouvera le nombre des jours par la formule 6e, $n = \frac{g - a + p}{p} =$

$\frac{17-2+3}{3} = \frac{18}{3} = 6$. On a donc donné l'aumône pendant 6 jours.

283. *Formules des progressions arithmétiques mises en ordre.*

Somme de tous les termes d'une progress. arithmétique.

1ere $s = (a+g) \times \frac{1}{2} n$

10^e $s = \frac{2an + pn^2 - pn}{2}$;

11^e $s = \frac{2gn - pn^2 + pn}{2}$;

Somme des ext.

7^e $a + g = \frac{s}{\frac{1}{2}} n = \frac{2s}{n}$;

Différence qui regne dans la progress. arith.

4^e $p = \frac{g-a}{n-1}$;

14^e $p = \frac{2s - 2an}{n^2 - n}$;

16^e $p = \frac{2gn - 2s}{n^2 - n}$;

1[er] terme.

3^e $a = g - p \times (n-1)$;

8^e $a = \frac{2s}{n} - g$;

15^e $a = \frac{2s - pn^2 + pn}{2n}$;

18^e $a = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{g^2 + gp + \frac{1}{4}p^2 - 2ps}$.

Nombre des termes.

6^e $n = \frac{g - a + p}{p}$;

12^e $n = \frac{2g + p}{p^2} \pm \sqrt{\frac{g^2 + gp + \frac{1}{4}p^2 - 2ps}{p^2}}$;

20^e $n = \frac{2s}{a+g}$; on la déduit de la 7e.

$a + g = \frac{2}{n}$;

13^e $n = -\frac{2a + p}{2p} \pm \sqrt{\frac{2ps + a^2 - ap + \frac{1}{4}p^2}{p^2}}$;

Nombre des termes moins un { 5^e $n - 1 = \frac{g-a}{p}$

Dernier terme.
- 2^e $g = a + p \times (n - 1)$;
- 9^e $g = \frac{2s}{n} - a$;
- 17^e $g = \frac{2s + pn^2 - pn}{2n}$;
- 19^e $g = -\frac{1}{2}p + \sqrt{2ps + a^2 - ap + \frac{1}{4}p^2}$;

284. *Formules des progressions arithmétiques, lorsque le premier terme est zéro.*

Somme de tous les termes.
- $s = \frac{gn}{2}$;
- $s = \frac{pn^2 - pn}{2}$;
- $s = \frac{2gn - pn^2 + pn}{2}$;

Somme des extrêmes. { $a + g = g = \frac{2s}{n}$;

Différence qui regne dans la progression.
- $p = \frac{g}{n-1}$;
- $p = \frac{2s}{n^2 - n}$;
- $p = \frac{2gn - 2s}{n^2 - n}$;

Nombre des termes.
- $n = \frac{g+p}{p}$;
- $n = \frac{2g+p}{2p} \pm \sqrt{\frac{g^2 + gp + \frac{1}{4}p^2 - 2ps}{p^2}}$;
- $n = \frac{2s}{g}$;
- $n = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2s}{p} + \frac{1}{4}}$;

Nombre des termes moins un. { $n - 1 = \frac{g}{p}$;

Dernier terme. $\begin{cases} g = pn - p \\ g = \frac{2s}{n}; \\ g = \frac{2s + pn^2 - pn}{2n}; \\ g = -\frac{1}{2}p + \sqrt{2ps + \frac{1}{4}p^2}. \end{cases}$

285. Si dans la 10e formule $s = \frac{2an + pn^2 - pn}{2}$, le 1er terme $a = 1$ & la différence $p = 2$, elle se réduira à celle-ci $s = \frac{2n + 2n^2 - 2n}{2} = n^2$; ce qui fait voir que dans la progression arithmétique des nombres impairs .... ÷ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c, la somme de tous les termes est égale au quarré du nombre des termes; en effet dans cette progression arithmétique poussée jusqu'à 8 termes, $s = 8 \times 8 = 64 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$. C. Q. F. B. R.

286. Tout ce qu'on vient de dire regarde les progressions arithmétiques croissantes. Si elles étoient décroissantes, les formules trouvées subsisteroient toujours, pourvu qu'on observât de prendre g pour le premier terme, & a pour le dernier terme de la progression décroissante. Si on a la progression décroissante ÷ 30, 27, 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, alors $g = 30$, & $a = 3$; & l'on aura $s = \frac{gn + an}{2} = 165$; $a = g - p \times (n - 1) = 30 - 3 \times 10 + 3 = 3$, $g = a + pn - p = 3 + 3 \times 10 - 3 = 30$, premier terme; c'est-à-dire que dans le cas des progressions arithmétiques décroissantes, les formules de a donnent la valeur du dernier terme, & les formules de g donnent le premier terme; & dans

les autres formules a désigne le plus petit des deux extrêmes, & g le plus grand. On peut ajouter qu'il y a peu de questions sur les progressions arithmétiques que l'on ne puisse résoudre par ces formules générales, ou ramener à ces formules: toutes supposent 3 termes connus, à moins que le 1[er] terme ne soit zéro; dans ce cas, avec deux termes donnés, on peut connoître les autres à l'aide des formules du n° 284. C. Q. F. B. R.

Application des formules à la solution de quelques problêmes.

287. PROB. Il est sorti d'une place 8 détachemens en progression arithmétique; le premier est de 7 hommes, le second de 5 hommes de plus; on demande combien il y a d'hommes dans ces 8 détachemens?

SOLUTION. On voit qu'il s'agit de déterminer la somme s d'une progression arith. dont le 1[er] terme est $7 = a$, la différence $p = 5$, & le nombre des termes $n = 8$. Si dans la 10[e] formule $s = \frac{2an + pn^2 - pn}{2}$, on substitue à la place de ces lettres leur valeur, on aura $s = \frac{14 \times 8 + 5 \times 64 - 5 \times 8}{2}$ $= 196$, nombre d'hommes sortis de la place; en effet, la somme de la progression arith. de 8 termes ÷ 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, est 196. C. Q. F. Dét.

288. PROB. Il est sorti d'une place 196 hommes, en 8 détachemens, qui forment une progression arithmétique, & dont le dernier est de 42 hommes; on demande de combien d'hommes

eſt le premier détachement, & quelle eſt la différence qui regne dans la progreſſion ?

SOLUTION. Il s'agit de déterminer le premier terme d'une progreſſion arith. dont la ſomme $s = 196$, le nombre des termes $n = 8$, & le dernier terme $g = 42$. On cherchera dans les formules (283) ſi avec ces données on pourra déterminer la valeur du premier terme a ; on trouvera que la 8ᵉ formule $a = \frac{2s}{n} - g$ ſatisfait à la queſtion ; car ſubſtituant, on aura $a = \frac{392}{8} - 42 = 7$. Le premier détachement étoit donc compoſé de 7 ſoldats. Pour trouver la différence p, on fera uſage de la formule $p = \frac{g - a}{n - 1} = \frac{42 - 7}{7} = \frac{35}{7} = 5$. Il y avoit donc 5 hommes de plus dans le ſecond détachement que dans le premier 7, &c. C. Q. F. Dét.

289. PROB. Un fantaſſin fait 10 lieues par jour; un cavalier part en même tems & ne fait que 3 lieues le premier jour, mais chaque jour ſuivant il fait deux lieues de plus que le précédent ; on demande en combien de jours le cavalier atteindra le fantaſſin, & combien ils auront fait de chemin chacun ?

SOLUTION. Il eſt clair que le nombre de jours x, que le cavalier emploiera pour atteindre le fantaſſin étant multiplié par 10 lieues que le fantaſſin fait par jour, donnera un produit qui exprimera le chemin que chacun aura fait, & en même tems la ſomme des termes d'une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt 3, la différence 2 & le nombre des termes x. Le dernier terme ſera donc (280) $3 + 2 \times (x - 1) = 3 + 2x - 2 = 2x + 1$, & la ſomme des

extrêmes sera $2x + 1 + 3 = 2x + 4$, qui étant multipliée par la moitié du nombre des termes $\frac{1}{2}x$, donnera $\frac{2xx + 4x}{2} = x^2 + 2x$ pour la somme de tous les termes (281) ; mais cette somme est déjà exprimée par $10x$; on aura donc cette équation $x^2 + 2x = 10x$, ou $x^2 = 8x$, & divisant par x, on aura $x = 8$, nombre des jours que le cavalier a mis pour atteindre le fantassin, & ils ont fait chacun 80 lieues; en effet la somme des 8 termes de la progression arithmétique ÷ 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, est 80. C. Q. F. Dét.

290. PROB. Un tas de sable est distant d'une allée d'arbres de 40 toises. Elle exige pour la sabler 100 voitures, un charretier doit déposer le long de l'allée ces 100 voitures à 6 toises d'intervalle l'une de l'autre; on demande le chemin qu'il doit faire, la premiere voiture étant déposée à 40 toises du tas de sable.

SOLUTION. Le charretier fera 40 toises pour conduire sa premiere voiture du tas au lieu où il doit la décharger, & 40 toises pour retourner au tas ; son premier voyage sera donc de 80 toises: & comme il doit faire 6 toises de plus pour déposer sa seconde voiture, & 6 toises de plus pour retourner au tas, il fera 92 toises dans son second voyage ; par la même raison, le 3[e] voyage excédera le second de 12 toises ; & par l'état de la question chaque voyage excédera le précédent de 12 toises. Il s'agit donc de déterminer la somme des termes d'une progression arith. croissante, dont le premier terme $a = 80$, la différence $p = 12$, & le nombre des termes $n = 100$. On trouve (283) que la 10[e] formule $s = \frac{2an + pn^2 - pn}{2}$

satisfait

ſatisfait à la queſtion ; car ſubſtituant les nombres, on a $s = \frac{160 \times 100 + 12 \times 10000 + 12 \times 100}{2} =$ 67400 toiſes, ou 29 lieues communes & $\frac{97}{105}$, chacune de 2282^t 3 pieds. C. Q. F. Dét.

291. PROB. Déterminer le dernier terme d'une progreſſion arith. croiſſante, dont le premier terme $a = 4$, la différence $p = 5$, & la ſomme de tous les termes $s = 133$.

SOLUTION. On trouve (283) que la 17e formule $g = -\frac{1}{2}p + \sqrt{2ps + a^2 - ap + \frac{1}{4}p^2}$ ſatisfait à la queſtion ; car ſubſtituant les nombres à la place des caracteres algébriques, on aura $g = -\frac{5}{2} + \sqrt{10 \times 133 + 16 - 20 + \frac{25}{4}} = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5329}{4}} = -\frac{5}{2} + \frac{73}{2} = 34$; ainſi le dernier terme g eſt 34. C. Q. F. Dét.

292. PROB. Déterminer le premier terme d'une progreſſion arithmétique dont la différence $4 = p$, le dernier terme $g = 30$, & la ſomme de tous les termes $s = 128$.

SOLUTION. On trouve (283) que la formule 18^e $a = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{g^2 + gp + \frac{1}{4}p^2 - 2ps}$ ſatisfait à la queſtion ; en effet ſubſtituant, on aura $a = 2 \mp \sqrt{900 + 120 + 4 - 8 \times 128} = 2 \mp \sqrt{1024 - 1024} = 2$. Le premier terme eſt donc 2. C. Q. F. Dét.

293. PROB. Déterminer le nombre des termes d'une progreſſion arith. dont le dernier terme $g = 30$, la différence $p = 4$, & la ſomme de tous les termes $s = 128$.

SOLUTION. On trouve (283), que la formule 12^e $n = \frac{2g + p}{2p} \pm \sqrt{\frac{g^2 + pg + \frac{1}{4}p^2 - 2ps}{p^2}}$ ſatisfait à la queſtion ; en effet ſubſtituant, on aura $n =$

$$\frac{60+4}{8} \pm \sqrt{\frac{900+120+4-8\times128}{16}} = 8 \pm \sqrt{\frac{1024-1024}{8}}$$

$= 8$, nombre des termes. C. Q. F. Dét.

294. PROB. Déterminer la différence qui regne dans une progreſſion arithmétique dont le nombre des termes $n = 8$, le dernier terme $g = 30$, & la ſomme de tous les termes $s = 128$.

SOLUTION. On trouve (283) que la 16ᵉ formule $p = \frac{2gn - 2s}{n^2 - n}$ ſatisfait à la queſtion ; car ſubſtituant, on aura $p = \frac{60 \times 8 - 2 \times 128}{64 - 8} = \frac{224}{56} = 4$, différence cherchée. C. Q. F. Dét.

On voit avec quelle facilité les formules (283) donnent la ſolution de tous les problêmes relatifs aux progreſſions arithmétiques ; on doit la découverte de ces formules au peu de calcul algébrique enſeigné, depuis le nº. 87 juſqu'au nº. 97 ; ce qui doit engager les jeunes gens à cultiver cette ſcience, qui conduit aux plus grandes découvertes dans toutes les parties des mathématiques ; ces mêmes formules donnent auſſi la méthode générale de diſpoſer une troupe en bataillon triangulaire, comme on va le voir.

295. Un bataillon triangulaire eſt un corps de troupes diſpoſé en triangle équilatéral ou iſoſcele, dont les rangs augmentent également & forment une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt l'unité. Si la différence qui regne dans la progreſſion eſt 1, le triangle eſt équilatéral, le dernier rang eſt égal au nombre des rangs ou au nombre des termes de la progreſſion, & la ſomme de tous les termes égale le quarré du nombre des termes plus le nombre des termes, le tout diviſé par 2 ;

car dans ce cas la premiere formule (283) $s = (a+g) \times \frac{1}{2} n$, devient (à cause de $a = 1$ & de $g = n$) $s = (1+n) \times \frac{1}{2} n = \frac{n^2 + n}{2}$; ainsi, si le bataillon équilatéral est de 30 rangs, on aura $s = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{900 + 30}{2} = 465$ hommes.

296. PROB. Trouver le nombre des rangs d'un bataillon triangulaire équilatéral de 78 hommes.

SOLUTION. La question se réduit à trouver le nombre des termes d'une progression arithmétique, dont le premier terme $a = 1$, la différence $p = 1$, & la somme de tous les termes $s = 78$. On trouve (283) que la 13ᵉ formule $n = \frac{-2a+p}{2p} \pm \sqrt{\frac{2ps + a^2 - ap + \frac{1}{4}a}{p^2}}$ devient (à cause de $a = p = 1$) $n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2 \times 78 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{25}{2} = 12$. Il y a donc 12 rangs, & le 12ᵉ rang est de 12 hommes, le 1ᵉʳ n'ayant qu'un homme. Il est bon d'observer que la formule $n = -\frac{1}{2} + \sqrt{2s + \frac{1}{4}}$ indique que si au double du nombre s d'hommes, qu'on propose de ranger en bataillon triangulaire équilatéral, on ajoute $\frac{1}{4}$, on aura un nombre, dont la racine quarrée moins $\frac{1}{2}$, sera le nombre des rangs du bataillon triangulaire équilatéral, ou le nombre d'hommes du dernier rang. *Par exemple*, si $s = 500$ hommes, on aura $n = -\frac{1}{2} + \sqrt{2s + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{4001}{4}} = \frac{63}{2} - \frac{1}{2} = 31$ rangs; en effet, une progression arith. de 31 termes, dont le premier est 1, le dernier 31, donne pour la somme de tous les termes $s = (31+1) \times \frac{31}{2} = \frac{32 \times 31}{2} = \frac{992}{2} = 496$. Le nombre proposé 500

hommes eſt donc trop grand de 4 hommes; qu'on peut employer ailleurs. C. Q. F. B. R.

297. PROB. 1°. Déterminer le nombre d'hommes néceſſaires pour former un bataillon triangulaire, dont la différence eſt 2, & le nombre des rangs 12; 2°. un nombre d'hommes étant donné, en former un bataillon triangulaire dont la différence d'un rang au ſuivant ſoit 2.

SOLUTION. Il s'agit de trouver la ſomme d'une progreſſion arith. dont le premier terme $a = 1$, la différence $p = 2$, & les nombres des termes $n = 12$. On aura (283) la 10e formule $s = \frac{2an + pn^2 - pn}{2} = \frac{2n + 2n^2 - 2n}{2} = n^2 = 144$ hommes, ſomme de tous les termes. C. Q. F. 1°. Dét.

2°. On voit dans ce cas que $s = n^2$; ce qui indique qu'il faut tirer la racine quarrée du nombre propoſé. Elle exprimera le nombre des rangs. Si $s = 400$, la racine 20 exprime le nombre des rangs du bataillon triangulaire dont la différence eſt 2; en effet les rangs forment cette progreſſion arithmétique ÷ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, dont la ſomme (281) eſt $(1 + 39) \times 10 = 400$ (1). C. Q. F. 2°. Dét.

(1) On aura occaſion dans la ſuite de faire uſage de la théorie des progreſſions arithmétiques. On doit ſe la rendre familiere. On ajoutera que dans quelques rencontres à la guerre, il peut être avantageux de diſpoſer un corps de troupe en bataillon triangulaire.

*

DES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

298. DÉF. UNE suite de nombres ou de grandeurs qui se contiennent également, forme une progression géométrique (11); elle est croissante si les termes vont en augmentant, comme,

∺ 1, 3, 9, 27, 81, 243 &c.

∺ a, b, c, d, f, g &c.

La progression est décroissante si les termes vont en diminuant; comme,

∺ 243, 81, 27, 9, 3, 1 &c.

∺ a, b, c, d, f, g &c.

On appelle en général *exposant*, ou raison de la progression, le quotient du plus grand des deux termes de suite, divisé par l'autre; si $a > b$, la raison de la progression est $\frac{a}{b}$; si $\frac{a}{b} = \frac{r}{q}$, le rapport $\frac{r}{q}$ est la raison de la progression, & si $\frac{a}{b} = \frac{r}{q} = p$, ce quotient p est l'*exposant*, ou la raison de la progression. On exprimera par s la somme de tous les termes, par n le nombre des termes. $n - 1$ indiquera le nombre des termes qui précedent le dernier ou qui suivent le premier. Ces dénominations donnent la facilité de généraliser les propriétés des progressions géométriques, dont la premiere est que, si on forme une suite de rapports des termes d'une progression; la somme des antécédens égale celle de tous les termes moins le dernier, & la somme des conséquens égale celle de tous les termes moins le premier; en effet, de la progression géométrique ∺ a, b, c, d, f, g, &c. on

S iij

déduit cette suite de rapports égaux, $a:b::b:c::c:d::d:f::f:g$, dont la somme des antécédens est $a+b+c+d+f=s-g$, & celle des conséquens est $b+c+d+f+g=s-a$; de cette propriété on déduit les suivantes $s-g:s-a::a:b$ (213), d'où (207), $sb-bg=as-aa$; transposant & observant que les restes soient positifs, on aura, pour les progressions décroissantes, $aa-bg=as-bs$; divisant de part & d'autre par $a-b$, on aura $s=\frac{aa-bg}{a-b}$. Cette formule fait voir que la somme de tous les termes d'une progression géométrique finie décroissante, est égale au quarré du premier terme moins le produit du second terme par le dernier, le résultat divisé par le premier terme moins le second. Si on divise les termes de la fraction $\frac{aa-bg}{a-b}$, qui représente s par le second terme b, on aura $s=\frac{\frac{aa-bg}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\frac{a\times\frac{a}{b}-g}{\frac{a}{b}-1}$, formule (1) qui indique que si on ôte le dernier terme g d'une progression géométrique décroissante du produit du premier par la raison, & qu'on divise le reste par la raison moins un, on

(1) Ces deux formules conviennent également aux progressions croissantes; mais en les suivant, on auroit à opérer sur des quantités négatives. Il faut aussi observer que dans cette derniere formule, $\frac{a}{b}$ ne représente la *raison* que dans le cas des progressions décroissantes : si on vouloit l'adapter aux progressions croissantes, il faudroit, à la place de la raison, dire : *le premier terme divisé par le 2*[e], ce qui alors donneroit une fraction.

aura la ſomme de tous les termes. Si la progreſſion eſt décroiſſante à l'infini, le dernier terme $g=0$. Dans ce cas la formule $s=\frac{aa-bg}{a-b}$ devient $s=\frac{aa}{a-b}$. Elle indique que la ſomme de tous les termes d'une progreſſion décroiſſante à l'infini, eſt égale au quarré du premier terme, diviſé par le premier moins le ſecond; & la formule $s=\frac{a\times\frac{a}{b}-g}{\frac{a}{b}-1}$ devient $s=\frac{a\times\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}-1}$; elle fait voir que la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, eſt égale au premier terme multiplié par la raiſon, diviſé par la raiſon diminuée d'une unité. C. Q. F. B. R.

299. Si la progreſſion eſt croiſſante, de l'équation $bs-bg=as-aa$, on déduit, en tranſpoſant, $bs-as=bg-aa$, d'où diviſant par $b-a$, $s=\frac{bg-aa}{b-a}$, formule qui indique que la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique croiſſante finie, eſt égale au produit du ſecond terme par le dernier moins le quarré du premier terme, diviſé par le ſecond terme moins le premier. Si l'on fait attention que dans la progreſſion géométrique croiſſante la raiſon eſt $\frac{b}{a}$, & qu'on diviſe les termes de la fraction qui exprime la valeur de $s=\frac{bg-aa}{b-a}$, par le premier terme a, on aura $s=\frac{\frac{bg-aa}{a}}{\frac{b-a}{a}}=\frac{g\times\frac{b}{a}-a}{\frac{b}{a}-1}$. Cette formule fait voir que ſi on ôte le premier terme

du produit du dernier terme par la raison, & qu'on divise le résultat par la raison diminuée d'une unité, on aura la somme de tous les termes de la progression. C. Q. F. B. R.

300. Les formules des progressions géométriques décroissantes finies (298) $s = \frac{aa - bg}{a - b}$ & $s = \frac{a \times \frac{a}{b} - g}{\frac{a}{b} - 1}$ peuvent aussi s'appliquer aux croissantes. Soit cette progression croissante ∺ 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c. dont la raison est 3, on aura en substituant $s = \frac{aa - bg}{a - b} = \frac{1 - 3 \times 243}{1 - 3} = \frac{-728}{-2} =$ 364 (91), somme de tous les termes $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$; on trouvera de même que $s = \frac{a \times \frac{a}{b} - g}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{1 \times \frac{1}{3} - 243}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{729}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{728}{3}}{-\frac{2}{3}} = 364$. C. Q. F. B. R.

Les formules qu'on a trouvées (298), donnent la solution d'une infinité de questions sur les progressions géométriques finies ou infinies. On en va voir l'usage dans le problême suivant.

301. PROB. Un cheval Arabe va dix fois plus vîte qu'un cheval Normand; celui-ci a une journée d'avance : on demande dans combien de tems le cheval Arabe atteindra le cheval Normand, & le chemin que chacun aura fait, sachant combien de chemin le cheval Normand a fait le premier jour.

SOLUTION. Par l'état de la question on voit que tandis que le cheval Arabe parcourra le che-

min de la premiere journée du cheval Normand, ce cheval Normand fera la 10e partie de la seconde journée, & que tandis que le cheval Arabe parcourra cette 10e partie de la seconde journée, le cheval Normand parcourra la 10e partie de cette 10e partie; ainsi de suite à l'infini: d'où il suit que les différentes parties du chemin que le cheval Arabe sera obligé de parcourir pour atteindre le Normand, formeront une progression décroissante à l'infini, dont le premier terme est le chemin fait par le cheval Normand pendant le premier jour, & la raison est 10. Ainsi exprimant le chemin de la premiere journée du cheval Normand par 1, la formule (298) donnera $s = \frac{a \times \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{1 \times 10}{10 - 1} = \frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}$, somme de tous les termes; ce qui indique que le cheval Arabe atteindra le Normand à la 9e partie de la seconde journée. Si elle est de 18 lieues, le cheval Arabe aura fait 20 lieues dans le tems que le cheval Normand fera 2 lieues, 9e partie de sa seconde journée. C. Q. F. Dét.

302. THÉOR. Dans toute progression géométrique croissante, 1°. chaque terme en général égale le premier terme multiplié par la raison élevée au degré exprimé par le nombre des termes qui le précedent; conséquemment le dernier terme égale le premier multiplié par la raison élevée au degré exprimé par le nombre des termes moins un.

2°. Le premier terme égale le dernier divisé par la raison élevée au degré exprimé par le nombre des termes moins un.

3°. On aura la raison de la progression, si du

quotient du dernier terme divisé par le premier; on tire la racine exprimée par le nombre des termes moins un.

Soit $\div\!\div a, b, c, d, f, g$ &c.
$\div\!\div 1, 3, 9, 27, 81, 243$ &c.

DÉM. Dans cette progression géométrique, la raison est $\frac{b}{a} = p = 3$ (298), & par sa nature chaque terme égale le précédent, multiplié par la raison. On aura donc

$a=a$	$1=1$
$b=a\times p=ap$	$3=1\times3$
$c=a\times p\times p=ap^2$	$9=1\times3\times3$
$d=a\times p\times p\times p=ap^3$	$27=1\times3\times3\times3$
$f=a\times p\times p\times p\times p=ap^4$	$81=1\times3\times3\times3\times3$
$g=a\times p\times p\times p\times p\times p=ap^5=ap^{n-1}$	$243=1\times3^{n-1}$.

C. Q. F. 1°. Dét.

2°. De l'équation $g = ap^{n-1}$, on déduit (114) $a = \frac{g}{p^{n-1}}$. C. Q. F. 2°. D.

3°. De la même équation $g = ap^{n-1}$, on déduit aussi $p^{n-1} = \frac{g}{a}$; tirant la racine $n - 1$ de cette équation, on aura $p = \sqrt[n-1]{\frac{g}{a}}$, & dans notre progression $p = \sqrt[6-1]{\frac{243}{1}} = \sqrt[5]{243} = 3$, racine 5e de 243; ainsi des autres. C. Q. F. 3°. Dém.

303. THÉOR. Dans toute progression géométrique; 1°. la différence du premier terme au second, est au second, comme la différence du premier terme au dernier, est à la somme des termes qui suivent le premier; 2°. la différence du premier au second, est au premier, comme la

différence du premier au dernier, est à la somme des termes qui précedent le dernier.

3°. Le premier terme est au dernier, comme le premier terme élevé au degré exprimé par le nombre des termes moins un, est au second terme élevé au même degré; en général le premier terme est à un terme quelconque de la progression, comme le premier terme élevé au degré exprimé par le nombre des termes qui précedent ce terme, est au second terme élevé au même degré.

Soit cette progr. $\div\!\div 2, 6, 18, 54, 162, 486$ &c.
$\div\!\div a, b, c, d, f, g$ &c.

DÉM. Cette progression donne ces rapports égaux $a:b::b:c::c:d::d:f::f:g$ d'où (213) (A) $a:b::a+b+c+d+f:b+c+d+f+g$, d'où (214) dans les progressions décroissantes $a-b:b::a+b+c+d+f-b-c-d-f-g:b+c+d+f+g$, ou corrigeant, on aura $a-b:b::a-g:b+c+d+f+g$; la même analogie (A) donne pour les progressions croissantes

$b-a:b::b+c+d+f+g-a-b-c-d-f:b+c+d+f+g$; corrigeant, on aura

$b-a:b::g-a:b+c+d+f+g$. C.Q.F. 1°.D.

2°. L'analogie (A) donne aussi pour les progressions décroissantes

$a-b:a::a+b+c+d+f-b-c-d-f-g:a+b+c+d+f$; corrigeant, on aura

$a-b:a::a-g:a+b+c+d+f$. Elle donne aussi pour les croissantes

$b-a:a::b+c+d+f+g-a-b-c-d-f:a+b+c+d+f$; corrigeant, on aura

$b-a:a::g-a:a+b+c+d+f$. C.Q.F.2°.D.

3°. *A démontrer* que $a:g::a^5:b^5::a^{n-1}:b^{n-1}$.

DÉM. Si $\frac{a}{b}=p$, on a auſſi $\frac{b}{c}=p$, $\frac{c}{d}=p$, $\frac{d}{f}=p$, $\frac{f}{g}=p$; multipliant ces équations terme par terme, on aura $\frac{abcdf}{bcdfg}=p^5$, qui ſe réduit à $\frac{a}{g}=p^5$; mais $\frac{a}{b}=p$; donc auſſi $\frac{a^5}{b^5}=p^5$; donc (98) on aura $\frac{a}{g}=\frac{a^5}{b^5}$, d'où . . . .
$a:g::a^5:b^5::a^{n-1}:b^{n-1}$.

On démontrera de même que le premier terme eſt au 3e, comme le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond ; que le premier eſt au 4e, comme le cube du premier eſt au cube du ſecond ; que le premier eſt au 5e, comme la 4e puiſſance du premier terme eſt à la 4e puiſſance du ſecond terme. C. Q. F. 3°. D.

AUTRE DÉM. de ce 3e cas. On a par la nature de la progreſſion géométrique,

1°. $a:b::a:b$ } d'où
2°. $a:b::b:c$ } $a^2:b^2::a:c$;
3°. $a:b::c:d$ } $a^3:b^3::a:d$;
4°. $a:b::d:f$ } $a^4:b^4::a:f$;
5°. $a:b::f:g$ } $a^5:b^5::a:g::a^{n-1}:b^{n-1}$;

On voit qu'on a multiplié ces proportions terme par terme, & qu'on a diviſé les termes des ſeconds rapports de chaque proportion, par leur communs multiplicateurs. Cela a donné les proportions annoncées. C. Q. F. 3°. D.

304. THÉOR. Dans une progreſſion géométrique croiſſante ; 1°. il y a toujours entre deux termes autant de fois la raiſon qu'il y a de termes intermédiaires plus un, & ſi on diviſe par le plus petit, on aura pour quotient la puiſſance de la

raiſon exprimée par le nombre des termes intermédiaires plus un ; 2°. quatre termes d'une progreſſion géométrique ſont en proportion, s'il y a autant de termes intermédiaires entre le premier & le ſecond, qu'entre le 3ᵉ & le 4ᵉ.

3°. Le produit des deux termes extrêmes eſt égal à celui de deux termes également éloignés des extrêmes.

4°. Le produit de tous les termes, multipliés ſucceſſivement l'un par l'autre, eſt égal au produit des extrêmes élevé au degré déſigné par la moitié du nombre des termes.

Soit la progr. ∺ 2, 6, 18, 54, 162, 486 &c. ou en général, celle ∺ a, b, c, d, f, g &c.

dont la raiſon $p = 3$.

A dém. 1°. que du 2ᵉ terme b, au 5ᵉ f, on a multiplié 3 fois par la raiſon, & que par conſéquent en diviſant le plus grand f par b, on aura le cube de la raiſon.

2°. Que $a : f :: b : g$;

3°. Que $ag = bf$;

4°. Que $abcdfg = a^{\frac{n}{2}} g^{\frac{n}{2}} = a^3 g^3$.

DÉM. 1°. Par la nature de la progreſſion, on a $b = a \times p$, le terme ſuivant $c = b \times p$ $(a \times p) \times p$, celui $d = c \times p = (a \times p) p \times p = (a \times p) p^2$; enfin le terme $f = d \times p = (a \times p) \times p^2 \times p = (a \times p) p^3$; c'eſt-à-dire, le terme b multiplié autant de fois par p, qu'il y a de termes intermédiaires c & d, & une fois de plus : par conſéquent, ſi on diviſe ce terme f par b, on aura en ſubſtituant leurs valeurs $\frac{f}{b} = \frac{(a \times p) p^3}{a \times p} = p^3$,

puissance de la raison élevée au degré exprimé par le nombre des termes intermédiaires plus 1. C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisqu'il y a autant de termes intermédiaires entre a & f, qu'entre b & g, c'est-à-dire, ici 3 termes, chaque terme f & g, *vaudra* le terme a ou b, multiplié par la raison élevée à la 4e puissance; on a donc $a \times p^4 = f$, & $b \times p^4 = g$, d'où $p^4 = \frac{f}{a}$ & $p^4 = \frac{g}{b}$ d'où enfin $\frac{f}{a} = \frac{g}{b}$: on a donc la proportion $f : a :: g : b$, ou $a : f :: b : g$. C. Q. F. 2°. D.

3°. On vient de voir que les extrêmes d'une progression sont en proportion avec deux termes à égale distance des extrêmes, c'est-à-dire $a : f :: b : g$; donc faisant le produit des extrêmes & celui des moyens de cette proportion, on aura le produit des extrêmes $ag = bf$, produit de deux termes également éloignés des extrêmes (1). C. Q. F. 3°. D.

4°. Dès qu'on vient de démontrer que $ag = bf = cd$, on aura le produit de tous les termes $ag \times bf \times cd = ag \times ag \times ag$, c'est-à-dire, égal au produit des extrêmes, multiplié autant de fois par lui-même qu'il y a de fois deux termes dans la progression, ainsi $abcdfg = (ag)^{\frac{n}{2}} = a^3 g^3$. C. Q. F. 4°. D.

305. D'où il suit, 1°. que si on connoît com-

(1) Si la progression étoit composée d'un nombre de termes impairs, le produit des extrêmes égaleroit le quarré du terme du milieu; car alors il y auroit autant de termes intermédiaires entre le premier terme & lui, qu'entre lui & le dernier terme : il seroit donc moyen proportionnel entre ces deux termes; donc (207) son quarré égale le produit des extrêmes.

bien il y a de termes intermédiaires entre deux termes donnés, on trouvera facilement la raison de la progression; car en divisant le plus grand des deux termes par le plus petit, on aura un quotient qui sera la raison élevée au degré exprimé par le nombre des termes intermédiaires plus un; donc si on en tire la racine du même degré, elle sera la raison.

Par exemple. On sait qu'entre les deux termes 6 & 162 d'une progression, il y a deux termes; on divisera donc 162 par 6; le quotient 27 sera la 3e puissance de la raison, parce qu'il y a deux termes intermédiaires. Ainsi si on tire la racine cube de 27, on aura 3 pour la raison de la progression; s'il y avoit 19 termes intermédiaires, il faudroit tirer la racine 20e, &c.

2°. Que si on connoît la raison de la progression, on trouvera le nombre des termes compris entre les deux termes donnés; pour cet effet on divisera le plus grand des deux termes par le plus petit, & on multipliera successivement la raison par elle-même, jusqu'à ce qu'on trouve un nombre égal au quotient; si on a été obligé d'élever la raison à la 5e puissance, il y a 4 termes intermédiaires; si on l'a élevé à la 20e puissance, il y a 19 termes entre les deux termes donnés; car par la nature de la progression, ce quotient est la 5e ou la 20e puissance de la raison, & il y a 3 ou 19 termes intermédiaires entre les deux termes donnés. Il suit de tout ce qui précede qu'un terme d'une progression géométrique étant donné avec la raison, on trouvera tous les termes tant au-dessus qu'au-dessous du terme donné, car (302) chaque terme est fait du précédent multiplié par la raison; donc aussi en

divisant le terme donné par la raison, on aura le précédent ; ainsi si on appelle a le terme donné, & la raison p, on aura

$$\div \frac{a}{p^4}, \frac{a}{p^3}, \frac{a}{p^2}, a, ap, ap^2, ap^3, ap^4, ap^5, ap^6 \text{ \&c.}$$

Propriétés des progressions géométriques comparées termes pour termes aux progressions arithmétiques.

306. Si dans la progression ci-dessus, déterminée à l'aide d'un seul terme connu & de la raison, on suppose que ce terme $a = 1$, & la raison $p = 10$; & que sous la progression géométrique que donne cette hypothese, on écrive une progression arithmétique, dont la différence soit l'unité & le premier terme zéro ; on aura les deux suites ci-dessous.

(A) $\div \frac{1}{10000}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, 1000, 10000$ &c.
(B) $\div -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ &c.

Dans lesquelles on a fait répondre le terme zéro de la progression arithmétique (B) au terme 1 de la progression géométrique (A), & par conséquent les termes -1, -2, &c. aux termes fractionnaires $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. D'après la nature de ces deux progressions correspondantes, on verra aisément,

1°. Qu'il y aura, entre deux termes quelconques de la progression arith., autant de fois la différence qui y regne, qu'il y a de fois la raison entre les deux termes correspondans de la progression géométrique ; on voit qu'entre les termes 1 & 5 de la progression arithmétique il y a 3 termes & 4 fois la différence 1 ; de même on voit qu'entre les

les termes correſpondans 10 & 100000 de la progreſſion géométrique, il y a auſſi 3 termes & 4 fois la raiſon 10.

2°. Que ſi quatre termes de la progreſſion géométrique ſont en proportion, les quatre termes correſpondans de la progreſſion arithmétique ſeront en proportion arithmétique; en effet,

1 : 1000	::	100 : 100000		proportion géomét.
0 : 3	::	2 : 5		proportion arith.

307. 3°. Si on fait attention que le 4ᵉ terme d'une proportion géométrique qui a l'unité pour premier terme eſt égal au produit des moyens, & que le 4ᵉ terme d'une proportion airth., dont le premier terme eſt zéro, eſt égale à la ſomme des moyens, on en conclura que la ſomme de deux termes de la progreſſion arithmétique eſt un terme de cette progreſſion, qui répond au produit des termes correſpondans de la géométrique; la ſomme de 5 des termes ci-deſſus, 2 & 3, répond au terme 100000 de la progreſſion géométrique produit de 100 × 1000 termes de cette progreſſion, qui répondent aux termes 2 & 3 de la progreſſion arithmétique.

308. 4°. Si de même on ſe rappelle que dans toute diviſion, le diviſeur eſt au dividende, comme l'unité eſt au quotient (88), & que dans toute ſouſtraction le nombre qu'on ôte eſt à l'autre arithmétiquement, comme le zéro eſt au reſte, on verra que ſi on ôte un terme d'un autre, de la progreſſion arithmétique, le reſte ſera un terme de cette progreſſion qui répond au quotient des deux termes correſpondans de la progreſſion géométrique; en effet les termes 2 & 5 de la progreſſion arith. répondent aux termes

100 & 100000 de la géométrique, & si on ôte 2 de 5, le reste 3 répond au terme 1000 quotient de 100000, divisé par 100; . . . . aussi 100 : 100000 :: 1 : 1000, & 2 : 5 :: 0 : 3.

Donc la différence de deux termes de la progression arith. donne un terme à cette progression qui répond au terme de cette progression géométrique, qui est le quotient de la division des deux termes correspondans de la progression géométrique.

309. 5°. Les termes de la progression géométrique dès l'unité au-dessus sont faits de la raison multipliée successivement par elle-même; le terme qui suit l'unité est la raison 10, le suivant 100 est le quarré de la raison 10, le 3e après l'unité est le cube 1000 de la raison 10, le 4e 10000 est la 4e puissance de la raison 10, le 5e 100000 est la 5e puissance de la raison 10, & le 6e après l'unité est la 6e puissance 1000000 de la raison 10, &c. & dans la progression arith., on voit que les termes qui répondent à ceux-ci, représentent les exposans de ces puissances de la raison 10; de sorte que le terme 5 répond à la 5e puissance 100000 de la raison 10, le terme 3 répond au cube 1000 de la raison 10, &c. Donc si on veut avoir la racine cube d'un terme de la progression géométrique, il n'y a qu'à prendre le tiers du terme correspondant de la progression arithmétique; on aura un terme de cette progression arithmétique qui répondra au terme de la progression géométrique qui sera la racine cube cherchée. On veut la racine cube de 1000000, le tiers 2 du terme correspondant 6 est le terme de la progression arithmétique qui répond à la racine cube 100 de 1000000; de même

ſi on veut la racine quarrée de 10000, on prendra la moitié du terme correſpondant 4 de la progreſſion arithmétique; cette moitié 2 répondra à la racine quarrée 100 de 10000, &c. On voit auſſi que ſi on veut trouver le quarré, le cube, &c., d'un des termes de la progreſſion géométrique, il n'y a qu'à doubler ou tripler ſon terme correſpondant de la progreſſion arithmétique; il ſera le terme de cette progreſſion arithmétique qui répond au quarré ou au cube de ce terme; c'eſt une ſuite de la formation de ces progreſſions.

310. 6°. Une propriété non moins eſſentielle à obſerver, eſt que les termes au-deſſous de l'unité dans la progreſſion géométrique, ſont des fractions qui ont l'unité pour numérateur, & dont les dénominateurs ſont les mêmes puiſſances de la raiſon que celles des termes au-deſſus de l'unité à égale diſtance, & que les termes correſpondans de la progreſſion arith. ſont les mêmes que ceux au-deſſus de zéro à égale diſtance; avec cette différence, que ceux qui répondent aux termes fractionnaires ſont négatifs, -3 répond au terme $\frac{1}{1000}$, & 3 répond à 1000, &c.

311. On déduit de la nature de la progreſſion géométrique (298, 305, 306) & de ce qui précede juſqu'à ce n°, que pour inſérer entre chaque terme, & le ſuivant un nombre de termes quelconques, il faut prendre la raiſon, & en tirer la racine du degré exprimé par le nombre des termes qu'on veut inſérer plus un, c'eſt-à-dire que ſi entre chaque terme & le ſuivant de la progreſſion géométrique décuple,

(A) $\div\!\div$ $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 &c.
(B) $\div$ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

on veut introduire 9999999 termes, il faudra tirer la racine dix millionieme de la raiſon 10 de la progreſſion géométrique (A). Cette racine ſera la raiſon de la nouvelle progreſſion géométrique; de ſorte qu'on aura le terme qui ſuit immédiatement l'unité, & les ſuivans, en multipliant l'unité par cette racine 10000000ᵉ de la raiſon 10, & par ſes puiſſances ſucceſſives; on trouvera de même les termes intermédiaires entre 10 & 100, entre 100 & 1000, &c., en multipliant 10 & 100 par cette même raiſon $\sqrt[10000000]{10}$, & par ſes puiſſances ſucceſſives.

De même ſi entre les termes correſpondans de la progreſſion arithmétique, on veut introduire 9999999 termes, il faudra diviſer la différence 1 de la progreſſion arith. (B) par 10000000; le quotient $\frac{1}{10000000} = 0{,}0000001$ ſera la différence de la nouvelle progreſſion arith. dont les termes ſeront correſpondans chacun à chacun de ceux de la nouvelle progreſſion géométrique; & ſi l'on fait attention que les termes de cette nouvelle progreſſion géométrique croiſſent inſenſiblement, on reconnoîtra 1°. qu'elle renferme la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 ..... 1000000; c'eſt-à-dire que les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., ſont des termes de cette progreſſion géométrique qui ont leurs termes correſpondans dans la nouvelle progreſſion arithmétique.

÷ 0; 0,0000001...&c. 1; 1,0000001... &c. 2; 2,0000001...&c. 3; 3,0000001 &c.

Car les nombres 2, 3, 4, 5, ſont des termes exacts de cette nouvelle progreſſion géométri-

que, ou ils sont entre deux de ces termes; & dans ce dernier cas, comme les termes croissent d'une très-petite quantité, chacun pourra être pris sans erreur sensible pour celui des deux termes voisins, qui en approche le plus; 2°. on reconnoîtra aussi que le rang qu'occupe chaque terme inséré entre ceux de la progression géométrique décuple (A) est désigné par les unités décimales contenues dans le nombre correspondant de la progression arith.; le log. du 468ᵉ terme de la progression géométrique après l'unité est 0,0000468; après le terme 10 est 1,0000468; après 100 est 2,0000468; après 1000 est 3,0000468; après 10000 est 4,0000468. Si 2 est le 3010300ᵉ terme de la progression géométrique après l'origine 1, le terme correspondant de la progression arithmétique est 0,3010300; si 12 est le 791812ᵉ terme après 10, le terme correspondant de la progression arithmétique est 1,0791812; de même si 101 occupe le 43214ᵉ rang après le terme 100 de la progression géométrique, son terme correspondant dans la progression arithmétique est 2,0043214; conséquemment la distance de chaque terme à l'origine 1 de la progression décuple transformée dans la nouvelle progression géométrique, est représentée par le terme entier correspondant de la progression arithmétique; le terme 101 de la progression géométrique est le 20043214ᵉ terme après l'unité; le terme 10 occupe le 10000000ᵉ rang après l'unité, ou il est le 10000000ᵉ terme après l'unité; le terme 10000 est le 40000000ᵉ terme après l'unité, ou le 40000001ᵉ terme de la progression géométrique.

Si à l'aide de la racine 10000000e de la raison 10 de la progression géométrique décuple ∺ 1, 10, 100, 1000, 10000, &c., on déterminoit les 40000000e termes qui suivent le premier 1 jusqu'au dernier 10000 compris, & qu'on déterminât en même tems les termes correspondans de la progression arithmétique, ou qu'on se servit à cet effet d'une méthode plus expéditive (comme on va le voir), il est clair que les termes de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5.... 10000 seroient compris dans cette progression géométrique, & que si on formoit de leurs termes correspondans de la progression arithmétique une table, on auroit une suite de nombres qui auroient les propriétés développées (306, 307, 308, 309, 310). Ces nombres se nomment *logarithmes* & sont les termes correspondans de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5....., 10000. Ces mêmes logarithmes servent aussi pour les nombres fractionnaires plus petits que l'unité, en les prenant négativement comme on l'a remarqué (310).

DES LOGARITHMES.

312. DÉF. LES logarithmes en général sont des termes en progression arithmétique, répondant termes pour termes à ceux d'une progression géométrique quelconque. Ainsi en se servant de différentes progressions arithmétiques & géométriques, on pourra faire correspondre une infinité de logarithmes à un même nombre, & par conséquent faire répondre un même logarithme à une infinité de nombres.

Mais à cauſe des propriétés ci-deſſus développées, on a choiſi pour faire des tables de logarithmes, la progreſſion géométrique décuple, & la ſuite des nombres naturels, 0, 1, 2, &c. pour la progreſſion arithmétique correſpondante.

Ainſi dans l'uſage actuel, les logarithmes ſont des nombres artificiels, repréſentés par les termes d'une progreſſion arithmétique correſpondans terme à terme à ceux de la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4 . . . . . . 100000, &c. compris dans une progreſſion géométrique; ou ſi on ſuppoſe que l'unité & 100000 ſont les extrêmes d'une progreſſion géométrique de 50000001 termes, dans laquelle les nombres 2, 3, 4, 5 . . . . 100000 ſont compris, la diſtance du rang que chacun de ces nombres occupe dans cette progreſſion géométrique au premier terme 1 excluſivement, eſt le *logarithme* de ce nombre; ainſi le logarithme de 102 eſt 2,0086002, parce que le rang que 102 occupe dans la progreſſion géométrique de 50000001 termes eſt éloigné de l'origine de cette progreſſion de 20086002 ou qu'il eſt le 20086002[e] terme après l'unité.

313. PROB. Déterminer les logarithmes des nombres naturels depuis l'unité juſqu'à 100000, les logarithmes des termes de la progreſſion géométrique décuple étant fixés comme on voit ci-deſſous.

$$\div\!\div (A)\ \frac{1}{100000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000$$
$$\div (B)\ -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

SOLUTION. Si entre les termes 1 & 10 de la progreſſion décuple on inſere, comme on l'a dit (311), 9999999 moyens géométriques, & entre

leurs logarithmes, o & 1 un même nombre de moyens arith.; ces moyens arith. feront les logarithmes des termes correfpondans de la progreffion géométrique; or les nombres 2, 3, 4, 5, &c. feront compris parmi les moyens géométriques, & les termes arithmétiques qui leur répondront feront leurs logarithmes; ils repréfenteront les rangs que les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c. occuperont dans la progreffion géométrique après le premier terme ou l'origine 1. C'eft de ces logarithmes dont il s'agit de former une table. Il faut donc déterminer le logarithme ou moyen arithmétique qui répond à chacun de ces nombres 2, 3, 4, 5, &c., par exemple, celui de 3; pour cet effet on cherche une moyenne proportionnelle géométrique (C) entre 1 & 10; tirant la racine quarrée du produit 1 × 10 qu'on fuit jufqu'à 8 chiffres décimaux, fon logarithme eft la moyenne arithmétique entre o & 1. Elle eft 0,50000000, lui donnant auffi 8 chiffres décimaux. La moyenne géométrique étant plus grande que 3, fon logarithme 0,50000000 eft plus grand que le logarithme de 3. On cherche donc une moyenne géométrique (D) entre 1 & cette premiere moyenne géométrique plus grande que 3, on cherche auffi fon logarithme 0,25000000. On continue de chercher des moyennes proportionnelles géométriques & leurs logarithmes, jufqu'à ce qu'on trouve une moyenne proportionnelle géométrique égale à 3 fuivi de 8 zéros. Le logarithme de cette moyenne géométrique fera le logarithme du nombre 3. Il faut trouver 26 moyennes géométriques & autant d'arithmétiques. La 26e moyenne arithmétique eft le logarithme du nombre 3, comme on voit dans le procédé ci-après.

[V]oyez le [tab]leau ci-[apr]ès.

On trouve par un pareil procédé les logarithmes des nombres premiers, compris entre 1 & 10, entre 10 & 100, entre 100 & 1000, entre 1000 & 10000, entre 10000 & 100000, observant 1°. que le logarithme d'un nombre étant trouvé, on a celui de toutes ses puissances, en multipliant ce logarithme par le degré de la puissance de ce nombre dont on veut avoir le logarithme; c'est-à-dire, que le double du logarithme de 3 est le logarithme de son quarré 9, le triple du logarithme de 3 est le logarithme de son cube 27, &c.; 2°. que la somme des logarithmes de deux nombres est le logarithme du produit de ces nombres; 3°. que la différence des logarithmes de 2 nombres est le logarithme de leur quotient; 4°. que, si on divise le logarithme d'un nombre par 2, le quotient sera le logarithme de la racine quarrée de ce nombre; si on le divise par 3, le quotient sera la racine cube de ce nombre; enfin, que, si on divise le logarithme d'un nombre par 100, le quotient sera le logarithme de la racine 100e de ce nombre. Tout ceci a été démontré (306, 307, 308, 319 & 310). On voit aussi que cette construction des tables des logarithmes porte avec elle sa démonstration; mais elle est fort longue & pénible. C. Q. F. Dét.

314. *Exposé du calcul qu'on a été obligé de faire pour déterminer le logarithme du nombre 3.*

	Nombres en proportion géométriq. continue.	Logarithm.		Nombres en proportion géométriq. continue.	Logarithm.
A	1,00000000	0,00000000	P	3,00035655	0,47717285
C	3,16227766	0,50000000	Q	2,99993491	0,47711182
B	10,00000000	1,00000000	N	2,99951334	0,47705078
A	1,00000000	0,00000000	Q	2,99993491	0,47711182
D	1,77827941	0,25000000	R	3,00014572	0,47714233
C	3,16227766	0,50000000	P	3,00035655	0,47717285
D	1,77827941	0,25000000	R	3,00014572	0,47714233
E	2,37137370	0,37500000	S	3,00004031	0,47712708
C	3,16227766	0,50000000	Q	2,99993491	0,47711182
E	2,37137370	0,37500000	S	3,00004031	0,47712708
F	2,73841962	0,43750000	T	2,99998731	0,47711945
C	3,16227766	0,50000000	Q	2,99993491	0,47711182
F	2,73841962	0,43750000	T	2,99998731	0,47711945
G	2,94272717	0,46875000	V	3,00001390	0,47712326
C	3,16227766	0,50000000	S	3,00004031	0,47712708
G	2,94272717	0,46875000	V	3,00001390	0,47712326
H	3,05052789	0,48437500	X	3,00000070	0,47712135
C	3,16227766	0,50000000	T	2,99998731	0,47711945
H	3,05052789	0,48437500	X	3,00000070	0,47712135
I	2,99614286	0,47656250	Y	2,99999410	0,47712040
G	2,94272717	0.46875000	T	2,99998731	0,47711945
I	2,99614286	0,47656250	Y	2,99999410	0,47712040
K	3,02321308	0,48046875	Z	2,99999739	0,47712088
H	3,05052789	0,48437500	X	3,00000070	0,47712135
K	3,02321308	0,48046875	Z	2,99999739	0,47712088
L	3,00964753	0.47851563	AA	2,99999908	0,47712112
I	2,99614286	0,47656250	X	3,00000070	0,47712135
L	3,00964753	0,47851563	AA	2,99999908	0,47712112
M	3,00288762	0,47753906	BB	2,99999989	0.47712123
I	2,99614286	0,47656250	X	3,00000070	0,47712135
M	3,00288762	0,47753906	BB	2,99999989	0,47712123
N	2,99951334	0,47705078	CC	3,00000029	0,47712129
I	2,99614286	0,47656250	X	3,00000070	0,47712135
N	2,99951334	0,47705078	CC	3,00000029	0,47712129
O	3,00120000	0,47729492	DD	3,00000009	0,47712126
M	3,00288762	0,47753906	BB	2,99999989	0,47712123
O	3,00120000	0,47729492	DD	3,00000009	0,47712126
P	3,00035655	0,47717285	EE	3,00000000	0,47712125
N	2,99951334	0,47705078	BB	2,99999989	0,47712123

Le logarithme du nombre trois eſt donc 0,47712125 ou ſimplement 0,477121, négligeant ce qui eſt au-deſſous d'un millionieme d'unité, ce qui eſt plus que ſuffiſant dans la pratique; auſſi les logarithmes dans les Tables de M. l'Abbé de la Caille, faites pour les Géométres en général, & pour les Aſtronomes en particulier, n'ont que ſix décimales : on n'a pas été non plus au-deſſous dans la Table des logarithmes des nombres naturels depuis 1 juſqu'à 400, inſérée ci-après n°. 315A, pour en faciliter l'application.

315. On donnera dans la ſuite une méthode analytique plus facile, & plus expéditive pour déterminer les logarithmes des nombres naturels & fractionnaires. Il eſt bon en attendant d'obſerver qu'en changeant les ſignes des logarithmes des nombres au-deſſus de l'unité, on a ceux des nombres au-deſſous de l'unité, de ſorte que le logarithme de 10 eſt *l.* 10, celui de $\frac{1}{10}$ eſt — *l.* 10; en général le logarithme de *a* eſt *l. a*; celui de $\frac{1}{a}$ eſt — *l. a*.

La lettre *l* qui précede une grandeur algébrique ou un nombre quelconque déſigne que c'eſt le logarithme de ce nombre ou de cette grandeur dont il eſt queſtion.

315A. TABLE DES LOGARITHMES *des nombres, depuis l'unité jusqu'à 400, pour en faire connoître l'usage.*

Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.
0	*Infini nég.*	33	1.518514	66	1.819544	99	1.995635
1	0.000000	34	1.531479	67	1.826075	100	2.000000
2	0.301030	35	1.544068	68	1.832509	101	2.004321
3	0.477121	36	1.556303	69	1.838849	102	2.008600
4	0.602060	37	1.568202	70	1.845098	103	2.012837
5	0.698970	38	1.579784	71	1.851258	104	2.017033
6	0.778151	39	1.591065	72	1.857332	105	2.021189
7	0.845098	40	1.602060	73	1.863323	106	2.025306
8	0.903090	41	1.612784	74	1.869232	107	2.029384
9	0.954243	42	1.623249	75	1.875061	108	2.033424
10	1.000000	43	1.633468	76	1.880814	109	2.037426
11	1.041393	44	1.643453	77	1.886491	110	2.041393
12	1.079181	45	1.653213	78	1.892095	111	2.045323
13	1.113943	46	1.662758	79	1.897627	112	2.049218
14	1.146128	47	1.672098	80	1.903090	113	2.053078
15	1.176091	48	1.681241	81	1.908485	114	2.056905
16	1.204120	49	1.690196	82	1.913814	115	2.060698
17	1.230449	50	1.698970	83	1.919078	116	2.064458
18	1.255273	51	1.707570	84	1.924279	117	2.068186
19	1.278754	52	1.716003	85	1.929419	118	2.071882
20	1.301030	53	1.724276	86	1.934498	119	2.075547
21	1.322219	54	1.732394	87	1.939519	120	2.079181
22	1.342423	55	1.740363	88	1.944483	121	2.082785
23	1.361728	56	1.748188	89	1.949390	122	2.086360
24	1.380211	57	1.755875	90	1.954243	123	2.089905
25	1.397940	58	1.763428	91	1.959041	124	2.093422
26	1.414973	59	1.770852	92	1.963788	125	2.096910
27	1.431364	60	1.778151	93	1.968483	126	2.100371
28	1.447158	61	1.785330	94	1.973128	127	2.103804
29	1.462398	62	1.792392	95	1.977724	128	2.107210
30	1.477121	63	1.799341	96	1.982271	129	2.110590
31	1.491362	64	1.806180	97	1.986772	130	2.113943
32	1.505150	65	1.812913	98	1.991226	131	2.117271

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
132	2.120574	171	2.232996	210	2.322219	249	2.396199
133	2.123852	172	2.235528	211	2.324282	250	2.397940
134	2.127105	173	2.238046	212	2.326336	251	2.399674
135	2.130334	174	2.240549	213	2.328380	252	2.401400
136	2.133539	175	2.243038	214	2.330414	253	2.403121
137	2.136721	176	2.245513	215	2.332438	254	2.404834
138	2.139879	177	2.247973	216	2.334454	255	2.406540
139	2.143015	178	2.250420	217	2.336460	256	2.408240
140	2.146128	179	2.252853	218	2.338456	257	2.409933
141	2.149219	180	2.255273	219	2.340444	258	2.411620
142	2.152288	181	2.257679	220	2.342423	259	2.413300
143	2.155336	182	2.260071	221	2.344392	260	2.414973
144	2.158362	183	2.262451	222	2.346353	261	2.416641
145	2.161368	184	2.264818	223	2.348305	262	2.418301
146	2.164353	185	2.267171	224	2.350248	263	2.419956
147	2.167317	186	2.269513	225	2.352183	264	2.421604
148	2.170262	187	2.271842	226	2.354108	265	2.423246
149	2.173186	188	2.274158	227	2.356026	266	2.424882
150	2.176091	189	2.276462	228	2.357935	267	2.426511
151	2.178897	190	2.278754	229	2.359835	268	2.428135
152	2.181844	191	2.281033	230	2.361728	269	2.429752
153	2.184691	192	2.283301	231	2.363612	270	2.431364
154	2.187521	193	2.285557	232	2.365488	271	2.432969
155	2.190332	194	2.287802	233	2.367356	272	2.434569
156	2.193125	195	2.290035	234	2.369216	273	2.436163
157	2.195900	196	2.292256	235	2.371068	274	2.437751
158	2.198657	197	2.294466	236	2.372912	275	2.439333
159	2.201397	198	2.296665	237	2.374748	276	2.440909
160	2.204120	199	2.298853	238	2.376577	277	2.442480
161	2.206826	200	2.301030	239	2.378398	278	2.444045
162	2.209515	201	2.303196	240	2.380211	279	2.445604
163	2.212188	202	2.305351	241	2.382017	280	2.447158
164	2.214844	203	2.307496	242	2.383815	281	2.448706
165	2.217484	204	2.309630	243	2.385606	282	2.450249
166	2.220108	205	2.311754	244	2.387390	283	2.451786
167	2.222716	206	2.313867	245	2.389166	284	2.453318
168	2.225309	207	2.315970	246	2.390935	285	2.454845
169	2.227887	208	2.318063	247	2.392697	286	2.456366
170	2.230449	209	2.320146	248	2.394452	287	2.457882

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
288	2.459392	318	2.502427	348	2.541579	378	2.577492
289	2.460898	319	2.503791	349	2.542825	379	2.578639
290	2.462398	320	2.505150	350	2.544068	380	2.579784
291	2.463893	321	2.506505	351	2.545307	381	2.580925
292	2.465383	322	2.507856	352	2.546543	382	2.582063
293	2.466868	323	2.509203	353	2.547775	383	2.583199
294	2.468347	324	2.510545	354	2.549003	384	2.584331
295	2.469822	325	2.511883	355	2.550228	385	2.585461
296	2.471292	326	2.513218	356	2.551450	386	2.586587
297	2.472756	327	2.514548	357	2.552668	387	2.587711
298	2.474216	328	2.515874	358	2.553883	388	2.588832
299	2.475671	329	2.517196	359	2.555094	389	2.589950
300	2.467121	330	2.518514	360	2.556303	390	2.591065
301	2.478566	331	2.519828	361	2.557507	391	2.592177
302	2.480007	332	2.521138	362	2.558709	392	2.593286
303	2.481443	333	2.522444	363	2.559907	393	2.594393
304	2.482874	334	2.523746	364	2.561101	394	2.595496
305	2.484300	335	2.525045	365	2.562293	395	2.596597
306	2.485721	336	2.526339	366	2.563481	396	2.597695
307	2.487138	337	2.527630	367	2.564666	397	2.598791
308	2.488551	338	2.528917	368	2.565848	398	2.599883
309	2.489958	339	2.530200	369	2.567026	399	2.600973
310	2.491362	340	2.531479	370	2.568202	400	2.602060
311	2.492760	341	2.532754	371	2.569374		
312	2.494155	342	2.534026	372	2.570543		
313	2.495544	343	2.535294	373	2.571709		
314	2.496930	344	2.536558	374	2.572872		
315	2.498311	345	2.537819	375	2.574031		
316	2.499687	346	2.539076	376	2.575188		
317	2.501059	347	2.540329	377	2.576341		

Récapitulation des propriétés des Logarithmes.

316. 1°. La somme des logarithmes de deux nombres est le logarithme du produit de ces deux nombres; ainsi $l.\ a + l.\ b = l.\ ab$; $l.\ 3 + l.\ 5 = l.\ (3 \times 5) = l.\ 15$. C'est une suite de ce qu'on a démontré (306 & 307); pareillement la somme des logarithmes de plusieurs nombres est le logarithme du produit de ces nombres, multipliés successivement l'un par l'autre. C. Q. F. B. R.

2°. La différence des logarithmes de deux nombres est le logarith. du quotient de la division d'un de ces deux nombres par l'autre; $l.\ a - l.\ b = l.\ \frac{a}{b}$; $l.\ 48 - l.\ 8 = l.\ \frac{48}{8} = l.\ 6$; de même $l.\ 120 - l.\ 6 = l.\ \frac{120}{6} = l.\ 20$; ainsi des autres (308 & 313).

3°. Le double du logarithme d'un nombre est le logarithme du quarré de ce nombre; le triple du logarithme d'un nombre est le logarithme du cube de ce nombre; le centuple du logarithme d'un nombre est le logarithme de la centieme puissance de ce nombre. $2\ l.\ a = l.\ aa$; $3\ l.\ b = l.\ b^3$; $100\ l.\ a = l.\ a^{100}$; $3\ l.\ 5 = l.\ 125$; $6\ l.\ 5 = l.\ 5^6 = l.\ 15625$; en général, $x\ l.\ b = l.\ b^x$ (309 & 313). Ainsi si on veut la vingtieme puissance d'un nombre, il n'y a qu'à multiplier son logarithme par 20, le résultat sera le logarithme de la 20e puissance de ce nombre. C. Q. F. B. R.

4°. La moitié du logarithme d'un nombre est le logarithme de la racine quarrée de ce nombre; le tiers du logarithme d'un nombre est le loga-

rithme de la racine cube de ce nombre; la centieme partie du logarithme d'un nombre est le logarithme de la racine centieme de ce nombre. $\frac{l.a}{2} = l.\sqrt{a}$; $l.\frac{a}{3} = l.\sqrt[3]{a}$; $\frac{l.81}{2} = l.\sqrt{81} = l.9$; $\frac{l.125}{3} = l.\sqrt[3]{125} = l.5$; $\frac{l.a}{100} = l.\sqrt[100]{a}$; en général $\frac{l.a}{x} = l.\sqrt[x]{a}$, (309 & 313). C. Q. F. B. R.

317. On déduit des propriétés précédentes que le logarithme d'une fraction changeant de signe devient le logarithme de la fraction renversée.

Il s'agit de démontrer que $l.\frac{a}{b}$, étant pris négativement, devient $-l.\frac{b}{a}$, ou que $-l.\frac{6}{7} = l.\frac{7}{6}$.

DÉM. Par la seconde propriété des logarithmes (316), on a $l.\frac{a}{b} = l.a - l.b$; changeant les signes des termes de cette équation, on aura $-l.\frac{a}{b} = -l.a + l.b$. Mais $l.b. - l.a = l.\frac{b}{a}$. Donc $-l.\frac{a}{b} = l.\frac{b}{a}$; par la même raison $-l.\frac{6}{7} = l.\frac{7}{6}$; car $l.\frac{6}{7} = l.6 - l.7$; changeant de signe, on aura $-l.\frac{6}{7} = -l.6 + l.7 = l.\frac{6}{7}$; de même $l.\frac{11}{12}$, pris négativement, ou $-l.\frac{11}{12} = l.\frac{12}{11}$. Ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

318. THÉOR. Toute équation ordinaire peut se transformer en équation logarithmique & réciproquement (1).

DÉM. Il est évident que si deux grandeurs sont égales, leurs logarithmes doivent être égaux; donc si $ab = xx$, on aura $l.a + l.b = 2\,l.x$;

(1) Ceux qui n'auront pas connoissance du calcul algébrique, pourront passer cet article.

de

de même, si $\frac{ab^3}{d} = x^3$, on aura $l.\,a + 3\;l.\,b - l.\,d = 3\,l.\,x$; si $\frac{aa-bb}{c} = x$, on aura $l.\,(a+b) + l.\,(a-b) - l.\,c = l.\,x$; si $\frac{ac-bc}{d} = x$, on aura $l.\,(a-b) + l.\,c - l.\,d = l.\,x$; si $\sqrt[3]{\frac{a^2b^3}{d^2}} = x$, on aura $\frac{2l.a + 3l.b. - 2l.d}{3} = l.\,x$; conséquemment, si si on a l'équation logarithmique $2\,l.\,a - l.\,b = l.\,x$, elle deviendra cette équation ordinaire $\frac{a^2}{b} = x$; de même l'équation logarithmique . . . $\frac{2l \;:\; 4l.d - 2l.b}{3} = l.\,z$ devient $\sqrt[3]{\frac{x^2\,d}{b^2}} = z$. C. Q. F. D.

Il essentiel d'observer que pour qu'une équation ordinaire puisse se transporter en équation logarithmique, il faut que chaque membre puisse se réduire à un seul terme, ou à des termes qui aient un multiplicateur commun. La raison en est, qu'il n'y a point d'opération sur les log. qui réponde à l'addition & à la soustraction des nombres naturels dont ils sont les logarithmes. Ainsi si on se propose de transformer l'équation $\frac{aa-bd}{c} = x$ en équation logarithmique, comme le numérateur $aa - bd$ de la fraction qui forme le premier membre de l'équation n'a pas de commun multiplicateur, on transformera le terme bd, en un autre terme qui ait pour un de ses facteurs la grandeur a, comprise dans le premier terme, & pour l'autre de ses facteurs une grandeur f, qu'on déterminera en divisant le terme bd par la grandeur a; on aura donc $f = \frac{bd}{a}$, d'où $af = bd$; substituant dans l'équation

proposée à la place de bd sa valeur af, on aura $\frac{aa - af}{c} = x$, ou $\frac{(a-f)a}{c} = x$, qui donne l'équation logarithmique $l.(a - f) + l.a - l.c = l.x$. Ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

319. DÉF. Dans la table des logarithmes on a séparé par un point les entiers compris dans chaque logarithme. Ces entiers ainsi séparés des décimales de chaque logarithme, sont dans les tables ordinaires exprimés par un seul chiffre qu'on appelle *la caractéristique*. On appelle ainsi ce chiffre parce qu'il désigne dans quelle décade (1) est le nombre auquel répond un logarithme. En effet, par la nature des progressions dont on s'est servi pour la table des logarithmes, tout logarithme dont la caractéristique est zéro répond à un nombre au-dessous de 10; si la caractéristique est l'unité, le logarithme répond à un nombre au-dessous de 100 ou compris entre 10 & 100; si elle est 2, le logarithme répond à un nombre entre 100 & 1000; si la caractéristique est 3, le logarithme répond à un nombre entre 1000 & 10000; si elle est 4, le logarithme répond à un nombre entre 10000 & 100000; en général, le nombre auquel répond un logarithme qui renferme des décimales est plus grand que l'unité suivie d'autant de zéros que la caractéristique contient d'unités, & plus petit que l'unité suivie de zéros plus un que la caractéristique renferme d'unités. Le logarithme 2.396199 des Tables de

(1) On appelle *décade*, tous les nombres compris entre deux termes qui se suivent immédiatement dans la progression décuple 1, 10, 100, 1000, &c.; ainsi tous les nombres depuis 1 jusqu'à 10, sont dans la premiere décade, ceux depuis 10 jusqu'à 100 dans la seconde, &c.

M. l'Abbé de la Caille répond au nombre 249 qui est plus grand que 100 & plus petit que 1000; de même, le logarithme 4.080590 répond au nombre 12039 qui est plus grand que 10000 & plus petit que 100000.

320. Les Tables des logarithmes ne renferment que la suite des nombres entiers 1, 2, 3, 4, &c. jusqu'à 10000 & 20000 dans les Table ordinaires, ou jusqu'à 102100 dans celle *in-folio* de Gardiner qui est entre les mains de peu de personnes, de sorte qu'on a souvent à opérer sur des nombres qui excedent le plus grand nombre contenu dans les tables; d'ailleurs les fractions & les nombres composés d'entiers & de fractions, de même que les racines quarrées, cubiques, &c. des nombres qui ne sont point des quarrés, ni des cubes parfaits, ne s'y trouvent pas. Il est cependant essentiel de savoir déterminer les logarithmes de tous ces nombres, ou de trouver ces nombres lorsqu'on connoît leurs logarithmes; c'est ce qu'on va enseigner dans les problêmes suivans.

321. PROB. Trouver le logarithme d'un nombre entier.

SOLUTION. 1°. Si le nombre est au-dessous de 20000, comme 1428, on le trouvera dans la table à la colonne des nombres, & à côté son logarithme 3.154728. Ainsi des autres.

2°. Si le nombre proposé excede 20000, le plus grand de ceux contenus dans la table de M. l'Abbé de la Caille, on trouvera le logarithme de ce nombre, quelque grand qu'il soit, pourvu que ses produisans soient chacun plus petits que 20000; car (316, *art.* 1) la somme des logarithmes de tous ces produisans sera le logarithme de ce nombre; ainsi si on propose de trouver le loga-

rithme de 176451799 2 qui est fait de 1598 x 1002 x 1102, on ajoutera ensemble les logarithmes 3.203577, 3.000868, 3.042182 de ces produisans, leur somme 9.246627 est le logarithme du nombre 1764517992 (316); de même pour avoir le logarithme de 128640 qui est fait de 640 x 201, on ajoutera le logarithme 2.806180 de 640, avec 2.303196 logarithme de 201, leur somme 5.109376 est le logarithme du nombre proposé 128640. Ainsi des autres.

3°. Si le nombre proposé étoit *premier*, c'est-à-dire, s'il n'avoit point de nombre entier pour diviseur exact, on trouvera le logarithme de ce nombre, pourvu qu'il ne renferme au plus que 8 chiffres (1) tel que 27787713; pour cet effet on séparera ce nombre en deux tranches dont la premiere à gauche sera de 4 chiffres; on prendra le logarithme de la premiere tranche & celui de cette premiere tranche augmentée d'une unité; on ajoutera à chacun de ces logarithmes le logarithme de l'unité suivie d'autant de zéros que la seconde tranche contient de chiffres; on aura deux logarithmes dont on prendra la différence, & on fera une regle de Trois dont le premier terme sera l'unité suivie d'autant de

(1) On exige qu'il n'ait que 8 chiffres, afin qu'en le divisant en deux tranches, on n'ait que des mille dans la premiere tranche, c'est-à-dire, un nombre qu'on puisse trouver dans les tables d'Ozanam : si on avoit celles de M. de la Caille, qui sont d'un usage bien plus étendu, & dont la derniere édition, publiée & considérablement augmentée par M. l'Abbé Marie, est recommandable à plus d'un égard, on pourroit faire cette opération sur un nombre composé de neuf chiffres, pourvu que le premier à gauche fût 1.

zéros que la ſeconde tranche a de chiffres, le ſecond terme ſera la différence des deux logarithmes trouvés, le 3e terme la ſeconde tranche, & le 4e terme étant ajouté au petit de ces deux logarithmes donnera le logarithme du nombre propoſé.

Soit le nombre propoſé 27787713. Je le ſépare en deux tranches 2778/7713; le logarithme de la premiere tranche 2778 eſt 3.443732; celui de 2779 eſt 3.443889; ajoutant à chacun 4.000000, logarithme de 10000, parce que la ſeconde tranche a 4 chiffres, on aura les logarithmes 7.433732 & 7.443889 dont la différence eſt 157; on fera donc cette anologie,

10000 : 157 : : 7713 : x = 121, qui étant ajouté au plus petit logarithme 7.443732, on aura 7.4438453 pour le logarithme du nombre propoſé 27787713. Ainſi des autres.

On peut auſſi ſans ajouter à chaque logarithme celui 4.000000 de 10000, ſe contenter de trouver la différence entre le logarithme de la premiere tranche, & le logarithme du nombre qui excede cette premiere tranche d'une unité. Cette différence ſera le ſecond terme d'une analogie dont le premier terme ſera l'unité ſuivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la ſeconde tranche, le 3e terme la ſeconde tranche; le 4e étant trouvé, on l'ajoutera au logarithme de la premiere tranche, dont alors on augmentera la caractériſtique d'autant d'unités qu'il y a de chiffres dans la ſeconde tranche; le réſultat ſera le logarithme du nombre propoſé: de ſorte que ſi en général on exprime la premiere tranche par p, la ſeconde par c, l'unité ſuivie d'autant de zéros que cette ſeconde tranche a

contient de chiffres, par m, le logarithme du nombre proposé sera exprimé par cette formule,

$l.p + l.m + (l.(p+1) - l.p) \times \frac{c}{m}$, dans cet exemple ; substituant, on aura $l.\,2778 + l.\,10000 + (l.\,2779 - l.\,2778) \times \frac{7713}{10000}$, ou $3.443732 + 4.000000 + (3.443889 - 3.443732) \times \frac{7713}{10000}$, ou $7.443732 + 157 \times \frac{7713}{10000} = 7.443732 + 121 = 7.443853$, log. du nombre proposé 27787713, comme ci-dessus. C. Q. F. B. R.

En suivant cette formule, on trouvera que le logarithme de 9757895 est logarithme (9757) $+ l.\,(1000) + (l.\,9758 - l.\,9757) \times \frac{895}{1000} = 6.989350$. Car $l.\,9757 + l.\,1000 = 3.989316 + 3.000000 = 6.989316$, & $(l.\,9758 - l.\,9757) \times \frac{895}{1000} = (3.989316 - 3.989316) \times \frac{895}{1000} = \frac{45 \times 895}{1000} = 32{,}275 = 32$, en négligeant les décimales au-dessous des millioniemes; ainsi en ajoutant 32 au logarithme 6.989316, on aura 6.989350 pour le logarithme du nombre proposé 9575789; ainsi des autres.

322. PROB. Trouver le logarithme d'une fraction quelconque.

SOLUTION. Si l'on fait attention que toute fraction est une division indiquée, dont le numérateur est le dividende, & le dénominateur le diviseur, on verra (316, *art.* 2) que le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur moins le logarithme du dénominateur; & comme le dénominateur d'une fraction proprement dite est plus grand que le numérateur, le logarithme d'une fraction est négatif; en effet le logarithme de $\frac{7}{11}$ est $l.\,7 - l.\,11 = 0.845098 - 1.041393 = -0.196295$; de même le loga-

rithme de $\frac{371}{9723}$ eſt *l.* 371 — *l.* 9723 = 2.569374 — 3.987800 = — 1.418426 logarithme de la fraction $\frac{371}{9723}$. On trouvera auſſi que le logarithme de $\frac{57}{19}$ = *l.* 57 — *l.* 19 = 1.755875 — 1.278754 = 0.477121, logarith. qui, cherché dans la table n°. 315A, répond au nombre 3 quotient de 57 diviſé par 19. Le logarithme d'une fraction proprement dite, ſe trouve donc en ôtant le logarithme de numérateur de celui du dénominateur, & donnant au reſte le ſigne *moins* —.

Si la fraction eſt décimale comme 0,789 = $\frac{789}{1000}$, on ôtera le logarithme de ce nombre conſidéré comme entier du logarithme de l'unité ſuivie d'autant de zéros que la fraction décimale a de chiffres décimaux; le reſte précédé du ſigne *moins* ſera le logarithme de la fraction décimale propoſée; dans cet exemple, le logarithme de 0,789 = $\frac{789}{1000}$ eſt *l.* 789 — *l.* 1000 = 2.897077 — 3.000000 = — 0.102923, logarithme de la fraction 0,789, &c.

Si la fraction décimale a plus de 5 chiffres comme 0,789787 = $\frac{789787}{1000000}$, on trouvera (321 *art.* 2) que le logarithme de 789787 eſt 5.897565; on l'ôtera de 6.000000 logarithme de 1000000; le reſte — 0.102635 eſt le logarithme de la fraction propoſée 0,789787; donc en général ſi les termes de la fraction excedent 20000, on trouvera leurs logarithmes (321, *art.* 2). On ôtera celui du numérateur du logarithme du dénominateur; le reſte précédé du ſigne *moins* ſera le logarithme de la fraction propoſée. C. Q. F. Dét.

323. PROB. Trouver le logarithme d'un nombre compoſé d'entiers & de fractions.

SOLUTION. Pour déterminer le logarithme d'un nombre compoſé d'entiers & de fractions, il

faut le réduire en fraction (117); si les termes sont chacun au-dessous de 20000, on prendra leurs logarithmes dans la table; on ôtera celui du dénominateur du logarithme du numérateur; le reste sera le logarithme du nombre proposé; ainsi le logarithme de $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$ est (316, *art.* 2) *l.* 17 — *l.* 9 = 1.230449 — 0.698970 = 0.531479; celui de $54\frac{26}{31} = \frac{1699}{31}$ est *l.* 1699 — *l.* 31 = 3.230193 — 1.491362 = 1.738831. Ainsi des autres.

Si le nombre proposé étant réduit en fraction a un de ses termes plus grand que 20000 ou les deux, on trouvera (321, *art.* 2) le logarithme de chaque terme. Leur différence sera le logarithme du nombre proposé (316, *art.* 2); ainsi le logarithme de $1378\frac{27}{82} = \frac{113023}{82}$ est *l.* 113283 — *l.* 82 = 5.053167 — 1.913814 = 3.139353, logarithme du nombre proposé $1378\frac{27}{82}$. Ainsi des autres.

Trouvons encore, pour aplanir toutes les difficultés, le logarithme d'un nombre qui renferme des entiers & des décimales, tel que 3789,742 qui est égal à $\frac{3789742}{1000}$. On trouvera (321, *art.* 2) le logarithme de 3789742 considéré comme nombre entier; on aura 6.578609 duquel on ôtera 3.000000 logarithme du dénominateur 1000; le reste 3.578609 est le logarithme du nombre proposé 3789,742. Ainsi des autres C. Q. F. Dét.

324. Nous ferons observer, pour rendre la solution de ce problême plus simple, que les logarithmes des nombres au-dessus de mille croissent assez uniformément & à peu près de la même quantité; qu'ainsi si on ajoute au plus petit de deux logarithmes de suite la moitié de leur diffé-

rence, on aura le logarithme d'un nombre qui excedera le petit de la moitié de l'unité; si on lui ajoute la 8e, la 100e partie de la différence, on aura le logarithme d'un nombre qui excedera le petit d'une 8e ou d'une 100e partie de l'unité, &c. Si on veut donc avoir le logarithme de 1878 $\frac{1}{2}$, on ôtera le logarithme 3.273696 de 1878, du logarithme 3.273927 de 1879; la différence sera 231, dont la moitié 115 étant ajoutée au logarithme de 1878, on aura 3.273811 pour le logarithme de 1878 $\frac{1}{2}$; si on lui ajoute la 8e partie 28 de cette différence 231, on aura 3.273724 qui sera le logarithme de 1878 $\frac{1}{8}$.

Cette méthode indique que pour trouver le logarithme d'un nombre qui est entre deux nombres de suite compris dans la table, il faut faire cette analogie : l'unité, différence des deux nombres de suite, est à la différence du petit nombre à celui dont on cherche le logarithme, comme la différence des logarithmes des deux nombres compris dans la table, est à la différence du logarithme du petit nombre au logarithme du nombre proposé; ainsi pour trouver le logarithme de 1878 $\frac{1}{8}$, compris entre les logarithmes des nombres 1878 & 1879, on dira,

$1 : \frac{1}{8} :: 231 : x = \frac{231}{1} \times \frac{1}{8} = 231 \times \frac{1}{8} =$ 28. différence qui étant ajoutée au logarithme 3.273696 de 1878, donnera 3.273724 pour le logarithme de 1878 $\frac{1}{8}$; ainsi des autres.

Pour faire voir que cette méthode donne le logarithme assez exactement; trouvons, selon la méthode enseignée *n*°. 322, le logarithme de ce nombre $1878\frac{1}{8} = \frac{15025}{8} = \frac{3005 \times 5}{8}$, en ajoutant les logarithmes 3.477844, 0.698970 des

produisans 3005 & 5, & ôtant de leur somme 4.176814, le logarithme 0.903090 du diviseur 8, le reste 3.273724 est le log. du nombre proposé 1878 $\frac{1}{8}$. Ce logarith. est le même qu'on a trouvé par l'analogie ci-dessus; donc, en général, si on exprime l'unité par a, la différence du petit nombre à celui dont on cherche le logarithme par b, & la différence des deux logarithmes de suite de la table par d; l'excès x du logarithme qu'on cherche sur celui du petit nombre, sera exprimé par cette formule $x = \frac{bd}{a}$, qui, à cause de $a = 1$, devient $x = bd$. C. Q. F. B. R.

325. PROB. Déterminer à quel nombre un logarithme donné appartient.

SOLUTION. 1°. Si le logarithme proposé se trouve dans la table exactement ou qu'on en trouve un qui n'en differe que d'une ou de quelques uuités du dernier rang, le nombre correspondant sera celui auquel répond le logarithme donné; ainsi le logarithme 3.394802 répond au nombre 2482; de même, le logarithme 2.442483 étant cherché dans la table, on trouve que le logarithme qui en approche le plus est 2.442480; & comme ils ne different entr'eux que de 3 unités, ils peuvent être pris l'un pour l'autre; ainsi le nombre 277 qu'on trouve dans la table à côté du logarithme 2.442480 est le nombre qui, sans erreur sensible, répond au logarithme proposé 2.442483.

Si on se rappelle qu'en augmentant la caractéristique d'un logarithme donné d'une unité, on multiplie par 10 le nombre auquel il répond; que lorsqu'on lui ajoute 2 unités, on le multiplie par 100; que lorsqu'on lui ajoute 3 unités on le multipie par 1000 (316, *art.* 1), on conclura

que si au lieu de chercher dans la table le logarithme 2.442483, on cherche celui de 3,443483, on trouvera qu'il répond au nombre 2770 qui est 10 fois trop grand (316, *art.* 1); il devient donc comme ci-dessus 277,0 = 277.

Il est bon de chercher le logarithme donné avec la plus grande caractéristique 3 de la table d'Ozanam, ou 4 dans la table de l'Abbé de la Caille si le chiffre qui suit la caractéristique du logarithme donné n'excede pas 2, & diviser le nombre correspondant par l'unité suivie d'autant de zéros qu'on a ajouté d'unités à la caractéristique du logarithme proposé pour qu'elle devienne 3 ou 4; ainsi si on propose de trouver à quel nombre répond le logarithme 0.273001, on le cherchera comme s'il étoit 4.273001; ce logarithme répond à 18750 qui est 10000 fois trop grand (316), puisqu'au logarithme 0.273001, on a ajouté le logarithme 4.000000 de 10000; donc le nombre auquel répond le logarithme donné 0.273001 est $\frac{18750}{10000}$ = 1,8750 = 1,875. Ainsi des autres. C. Q. F. 1°. Dét.

2°. Si le logarithme proposé se trouve entre deux logarithmes de suite de la table, & qu'il differe de chacun d'eux de plus de 10 unités, on se rappellera la formule (324) $x = bd$, d'où l'on déduit $b = \frac{x}{d}$; ce qui indique que si on divise l'excès x d'un logarithme qui se trouve entre deux logarithmes de suite de la table sur le petit; par la différence de ces deux logarithmes de la table, on aura une fraction $\frac{x}{d}$, qui étant jointe au plus petit des nombres auxquels répondent les deux logarithmes de la table, on aura le nombre qui appartient au logarithme donné; ainsi, si on

veut ſavoir à quel nombre appartient le logarithme 3.427729, qui ſe trouve dans la table entre les logarithmes 3.427648 & 3.427811 des nombres 2677 & 2678, la différence de leurs logarithmes eſt $d = 162$, celle du logarithme de 2677 au logarithme donné 3.427729 eſt $x = 81$; donc ce logarithme répond au nombre $2677 \frac{81}{162} = 2677 \frac{1}{2}$.

Si la caractériſtique du logarithme donné eſt 0, 1 ou 2, comme eſt le logarithme 0.273950, alors ce logarithme répond à un nombre au-deſſous de mille; & comme la différence des logarith. de ces nombres ne peut pas, ſans erreur ſenſible, être regardée comme proportionnelle à la différence de ces nombres, on ajoutera 3 à la caractériſtique, & on aura 3.273950, log. d'un nombre 1000 fois plus grand que le nombre auquel répond le log. propoſé (316); or ce log. 3.273950 ſe trouve entre les log. 3.274158 & 3.273927 des nombres 1880 & 1879; la différence de ces logarithmes eſt $d = 231$, & celle du logarithme donné 3.273950 au logarithme de 1879 eſt $x = 23$. Donc le logarithme propoſé avec 3, pour caractériſtique, répond au nombre $1879 \frac{23}{231}$; mais ce nombre eſt mille fois trop grand: le nombre cherché eſt donc $\frac{1879}{1000} + \frac{23}{231000} = \frac{434072}{231000}$, en donnant le même conſéquent; ce qui ſe réduit à 1,87909, c'eſt-à-dire, que le logarithme propoſé 0.273950 répond au nombre 1,87909; auſſi ſe trouve-t-il entre les logarithmes de 1 & de 2. C. Q. F. 2°. Dét.

3°. Si le logarithme propoſé eſt négatif, tel que — 1.954599, qui répond à des dixiemes, ou plutôt à un nombre un peu plus grand qu'un centieme (310), alors, comme les logarithmes

négatifs ne se trouvent pas dans les tables, on lui ajoutera le logarithme 4.000000 de 10000 (1); ce sera multiplier cette fraction par 10000 (216); on aura le logarithme 2.045401, puisque 4.000000 — 1.954599 = 2.045401 (88) : on cherchera, comme ci-dessus, ce logarithme dans la table; on trouvera qu'il répond à 111 $\frac{78}{3895}$; mais ce nombre est 10000 fois trop grand, il devient donc $\frac{432423}{38950000}$ = 0,011102, fraction décimale à laquelle répond le logarithme proposé — 1.954599; en effet cette fraction 0,011102 excede un peu $\frac{1}{100}$; ainsi des autres. C. Q. F. 3°. Dét.

4°. Si le logarithme appartient à un nombre qui excede 20000, tel que le logarith. 5.934523, on le cherchera dans la table, avec la caractéristique 3, c'est-à-dire que du logarithme proposé 5.934523, on ôtera 2.000000, logarithme de 100, on aura 3.934523, qui (325, *art.* 2) répond à 8600 $\frac{25}{51}$; mais ce nombre est 100 fois trop petit (316, *art.* 2); il devient donc 860000 $\frac{2500}{51}$ = $\frac{43862500}{51}$ = 860049,019 = 860049,02, nombre auquel le logarithme proposé 5.934523 répond, à un millieme près.

Pour faire voir l'exactitude de cette méthode, trouvons (323) le logarithme de 860049,02 = $\frac{86004902}{100}$; on aura *l.* 86004902 — *l.* 100 = 7.934523 — 2.000000 = 5.934323, qui est le logarithme proposé; de même, si on veut

---

(1) Pour la plus grande exactitude, on doit ajouter au logarithme négatif, un logarithme tel que la caractéristique du reste soit 3, logarithme de 1000; ainsi dans cet exemple, on devroit, pour une approximation plus exacte, ajouter 5,000000, logarithme de 100000.

ſavoir à quel nombre répond le logarithme 8.538244, on en ôtera 5.000000, logarithme de 100000; on aura 3 538244, qui répondra à 3453 $\frac{47}{126}$; mais ce nombre étant 100000 fois trop petit (316, *art.* 2), il deviendra donc $345300000\frac{4700000}{126} = \frac{43512500000}{126} = 345337301,5873$, nombre auquel répondra le logarithme propoſé 8.538244, & cela à plus d'un dix millieme près. Ainſi des autres. C. Q. F. 4°. Déter.

Application des principes précédens à la ſolution de quelques problêmes curieux ou intéreſſans.

326. PROB. Trouver un nombre m de moyens proportionnels géométriques entre deux nombres donnés a & b : on ſuppoſe a plus petit que b, $a < b$.

SOLUTION. Il eſt clair qu'il s'agit de trouver la raiſon qui doit regner dans la progreſſion, & qu'en la multipliant par le premier terme a, on aura le premier moyen proportionnel cherché. Or le nombre de raiſons contenues entre a & b eſt (304) exprimé par le nombre de moyens proportionnels plus un, ici par $m+1$; & ſi on tire la racine $m+1$ de b diviſé par a, on aura la raiſon (305). Elle eſt donc $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ dont le logarithme (316, *art.* 4) eſt $l.\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} = \frac{l.b - l.a}{m+1}$, multipliant la raiſon par le premier terme a, on aura le premier moyen, qui ſera exprimé par $a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, dont le logarithme

sera $l.a + \frac{l.b - l.a}{m+1} = \frac{ml.a + l.a + l.b - l.a}{m+1} = \frac{ml.a + l.b}{m+1}$, formule pour trouver le premier d'un nombre m de moyens proportionnels géométriques entre deux nombres donnés a & b. Elle indique qu'il faut multiplier le logarithme du petit nombre par le nombre des moyens proportionnels qu'on veut déterminer, ajouter le produit au logarithme du plus grand des deux nombres donnés, & diviser la somme par le nombre de moyens proportionnels plus un; le quotient sera le logarithme du premier moyen proportionnel demandé. Il sera après cela facile de déterminer les logarithmes des termes qui suivent le premier moyen proportionnel trouvé, en ajoutant à son logarithme $\frac{ml.a + l.b}{m+1}$ le logar. $\frac{l.b - l.a}{m+1}$ de la raison une fois, deux fois, trois fois, &c.

Par exemple, on veut 5 moyens proportionnels géométriques entre $2 = a$ & $b = 128$. On aura, 1°. le logarithme de la raison $\frac{l.b - l.a}{m+1} = \frac{l.128 - l.2}{6} = \frac{2.107210 - 0.301030}{6} = 0.301030$, qui répond au nombre 2; ainsi le premier moyen proportionnel est $2 \times 2 = 4$, produit du premier terme $a = 2$, par la raison 2 qu'on vient de trouver. Le 2e est $4 \times 2 = 8$ &c.; les 5 moyens proportionnels entre 2 & 128 sont donc 4, 8, 16, 32, 64; en effet, on a cette progression, ∺ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Si on veut trouver le premier moyen proportionnel sans se servir de la raison, la formule $\frac{ml.a + l.b}{m+1}$ du premier moyen proportionnel donnera . . . .
$\frac{ml.a + l.b}{m+1} = \frac{5\,l.2 + l.128}{6} = \frac{5 \times 0.301030 + 2.107202}{6}$

$= 0.602060$, logarithme de 4, premier moyen proportionnel demandé. Ainsi des autres. C. Q. F. Dét.

327. PROB. Trouver la raison qui regne dans une progression géométrique, dont le premier terme est $2 = a$, & le 12^e $g = 354294$.

SOLUTION. Puisqu'il y a 12 termes dans cette progression, si on divise le dernier 354294 par le premier terme 2, le quotient 177147 sera la raison x élevée à la 11e puissance (302). On aura donc $x^{11} = 177147$; donc (318) $11\, l.x = l.\, 177147 = 5.248334$ (321, *art.* 3), d'où $l.x = \frac{5.248334}{11} = 0.477121$, logarithme de la raison 3 cherchée; en effet, on a cette progression, ÷ 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13122, 39366, 118098, 354294. C. Q. F. Dét.

328. PROB. Trouver le nombre des termes d'une progression géométrique dont le premier, le second & le dernier terme sont donnés.

SOLUTION. On sait (303, *art.* 3) que le premier terme est au dernier, comme le premier terme élevé au degré exprimé par le nombre des termes moins un, est au second terme élevé au même degré; ainsi si on exprime le nombre des termes moins un par x, le premier terme par $a = 2$, le second par $b = 6$ & le dernier par $g = 486$, on aura cette analogie $a : g :: a^x : b^x$. Leurs logarithmes donnent cette proportion arithmétique, $l.a : l.g :\cdot\; x\, l.a : x\, l.b$, d'où (204) $l.a + x\, l.b = l.g + x\, l.a$; transposant, on a $x\, l.b - x\, l.a = l.g - l.a$, d'où $x = \frac{l.g - l.a}{l.b - l.a}$, formule qui indique, que si on ôte le logarithme du premier terme du logarithme du dernier terme, & qu'on divise le reste par la différence du logarithme du second terme

à

à celui du premier, le quotient sera le nombre des termes moins un. Dans cet exemple . . . . $x = \frac{l.g - l.a}{l.b - l.a} = \frac{l.486 - l.2}{l.6 - l.2} = \frac{2.686636 - 0.301030}{0.778151 - 0.301030}$ $= \frac{2.385606}{0.477121} = 5$, nombre des termes moins un; donc il y a six termes dans la progression, dont $g = 486$ est le dernier; en effet, on a cette progression ∺, 2, 6, 18, 54, 126, 486 de six termes; ainsi des autres. C. Q. F. Dét.

328. PROB. On sait que le nombre $m = 78125$ est une puissance exacte du nombre $p = 5$; déterminer à quel degré il faut élever p pour avoir ce nombre m.

SOLUTION. Si on suppose le problême résolu, & que x exprime l'exposant du degré cherché de p, on aura $p^x = m$ ou $5^x = 78125$; mais si deux grandeurs sont égales, leurs logarithmes sont aussi égaux; on aura donc $x\,l.p = l.m$; d'où $x = \frac{l.m}{l.p} = \frac{l.78125}{l.5} = \frac{4.892790}{0.698970} = 7$; ainsi 78125 est la 7e puissance de 5; en effet . . . . $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 78125$. C. Q. F. Dét.

329. De l'équation $x\,l.p. = l.m$, on déduit $l.p = \frac{l.m}{x}$, c'est-à-dire, que si on divise le logarithme d'un nombre par l'exposant x de la racine qu'on en veut tirer, le quotient sera le logarithme de la racine cherchée; ce qu'on a déjà observé (316, *art.* 4). Si dans l'exemple ci-dessus on divise $l.m = l.78125 = 4{,}892790$ par $x = 7$, on aura $l.p = 0.698970$, logarithme de 5, racine 7e du nombre proposé 78125. C. Q. F. B. R.

330. PROB. On demande ce qu'une somme $a = 30000^{tt}$ placée à intérêt à 5 pour 100 de-

viendra au bout de 30 années, ayant égard à l'intérêt de l'intérêt.

SOLUTION. Si on fait $100 = c$, $5 = b$, on trouvera le gain de la somme a à la fin de la premiere année par cette analogie, $c : b :: a : \frac{ab}{c}$; cette somme sera donc à la fin de la premiere année $a + \frac{ab}{c} = \frac{ac + ab}{c} = a \times \frac{c + b}{c}$, capital à la fin de la premiere année. On trouvera ce que ce capital $a \times \frac{c + b}{c}$ gagnera dans la seconde année par cette analogie, $c : b :: a \times \frac{c + b}{c} : a \times \frac{bc + bb}{cc}$; donc à la fin de cette seconde année cette somme deviendra $a \times \frac{c + b}{c} + a \times \frac{bc + bb}{cc} = a \times \frac{cc + bc + bc + bb}{cc} = a \times \frac{cc + 2bc + bb}{cc} = a \times \left(\frac{c + b}{c}\right)^2 = a \times \left(\frac{21}{20}\right)^2$ à cause de $\frac{c + b}{c} = \frac{105}{100} = \frac{21}{20}$.

On trouvera ce qu'elle gagnera dans la 3e année par cette analogie,

$$c : b :: a \times \left(\frac{c + b}{c}\right)^2 : a \times \frac{bcc + 2bbc + bb^3}{c^3};$$

donc à la fin de la 3e année, on aura $a \times \frac{cc + 2bc + bb}{cc} + a \times \frac{bcc + 2bbc + b^3}{c^3} = a \times \ldots\ldots \frac{c^3 + 2bcc + bbc + bcc + 2bcc + b^3}{c^3} = a \times \frac{c^3 + 3bc^2 + 3bc^2 + b^3}{c^3} = a \left(\frac{c + b}{c}\right)^3 = a \times \left(\frac{21}{20}\right)^3$.

Par un semblable procédé, on trouvera que cette somme sera à la fin de la 4e année $a \times \frac{c + b}{c} \times \frac{c + b}{c} \times \frac{c + b}{c} \times \frac{c + b}{c} = a \times \left(\frac{c + b}{c}\right)^4 = 30000 \times \left(\frac{21}{20}\right)^4$.

A la fin de la 5e année $a \times \frac{c + b}{c} \times \frac{c + b}{c} \times$

$\frac{c+b}{c} \times \frac{c+b}{c} \times \frac{c+b}{c} = a \times \left(\frac{c+b}{c}\right)^5 =$ $30000 \times (\frac{21}{20})^5$ &c.; de forte qu'on aura cette progreffion géométrique croiffante,

$\div a, a \times \frac{c+b}{c}, a \times \left(\frac{c+b}{c}\right)^2, a \times \left(\frac{c+b}{c}\right)^3, a \times \left(\frac{c+b}{c}\right)^4 \ldots a \times \left(\frac{c+b}{c}\right)^{30} = 30000 \times (\frac{21}{20})^{30}$.

Il s'agit donc de trouver le dernier terme d'une progreffion géométrique de 31 termes, dont le premier eft $a = 30000$, & la raifon $\frac{c+b}{c} = \frac{105}{100} = \frac{21}{20}$; mais ce dernier terme eft fait de 30000, multiplié par la 30e puiffance de la raifon $\frac{c+b}{c} = \frac{21}{20}$; fi on multiplie $l. \frac{21}{20} = 0.021189$ par 30, on aura 0.635670, logarithme de la 30e puiffance de la raifon $\frac{21}{20}$ (316, *art.* 3). Ce log. cherché dans les tables, avec 3 unités à fa caractér. répond à $4321 \frac{43}{50}$, qui eft 1000 fois trop grand (316, *art.* 2); il devient donc $\frac{4321}{1000} + \frac{43}{50000} = \frac{216093}{50000} = 4{,}32186 = (\frac{21}{20})^{30}$, à un cent millieme près; on aura donc $a \times \left(\frac{c+b}{c}\right)^{30} = 30000^{tt} \times (\frac{21}{20})^{30} = 30000^{tt} \times 4{,}32186 = 129655^{tt}\ 8^f$, $= 129655^{tt}\ 16^f$. On voit donc qu'une fomme de 30000^tt^ à intérêt d'intérêt devient, au bout de 30 ans, 129655^tt^ 16^f^. C. Q. F. Dét.

331. On déduit de ce problême cette formule $a \times \left(\frac{c+b}{c}\right)^n$, pour trouver ce que devient une fomme quelconque a mife à intérêt d'intérêt pendant un nombre d'années n au taux b pour cent c; mais le log. de $\left(\frac{c+b}{c}\right)^n$ eft $n\ l. \left(\frac{c+b}{c}\right)$ (316, *art.* 3); ainfi fi on multiplie le nombre auquel

répond le logarithme $n\, l. \left(\frac{c+b}{c}\right)$, par la ſomme a miſe à intérêt, on aura ce que deviendra cette ſomme a à la fin du nombre d'années n. C. Q. F. B. R.

332. PROB. On demande pour combien d'années on doit placer une ſomme a, à intérêt d'intérêt à 5 pour 100 pour doubler cette ſomme.

SOLUTION. On a vu (330) que la ſomme a devient à la fin de la premiere année $a \times \frac{c+b}{c} = a \times \frac{21}{20}$; à la fin de la ſeconde, $a \times \left(\frac{c+b}{c}\right)^2 = a \times \left(\frac{21}{20}\right)^2$; ainſi à la fin du nombre d'années x cherchées, elle deviendra $a \times \left(\frac{21}{20}\right)^x = 2\,a$, puiſqu'alors la ſomme ſera doublée. Si on diviſe de part & d'autre par a, on aura $\left(\frac{21}{20}\right)^x = 2$, d'où (318) on déduit $x\, l. \left(\frac{21}{20}\right) = l.\, 2$, ou $x \times 0.021189 = 0.301030$; diviſant par 0.021189, on aura $x = \frac{0.301030}{0.021189} = 14.2$, c'eſt-à-dire, que dans 14 ans & environ 2 mois 6 jours, la ſomme a ſera doublée. C. Q. F. Dét.

Si la ſomme a étoit placée à 10 pour cent, on auroit $\left(\frac{11}{10}\right)^x = 2$, d'où $x\, l. \left(\frac{11}{10}\right) = l.\, 2$, ou $x \times 0.041393 = 0.301030$; diviſant par 0.041393, on aura $x = \frac{0.301030}{0.041393} = 7{,}27$, c'eſt-à-dire, qu'en 7 ans 3 mois & environ 7 jours, la ſomme a miſe à intérêt d'intérêt à 10 pour cent ſera doublée.

333. PROB. On tire chaque jour une pinte de vin d'un baril de 100 pintes. On la remplace par une pinte d'eau; on demande dans combien de jours le vin contenu dans le baril ſera réduit au quart.

SOLUT. Lorsqu'on a tiré une pinte de vin, & qu'on la remplace par une d'eau; il y a dans le baril $\frac{99}{100}$ de vin & $\frac{1}{100}$ d'eau qu'on suppose qui s'incorpore parfaitement avec le vin. La premiere pinte de ce mêlange qu'on tire, contient $\frac{1}{100}$ de chaque centieme de vin & d'eau du baril. On tire donc $\frac{99}{100 \times 100}$ de vin & $\frac{1}{100 \times 100}$ d'eau; il reste donc en vin $\frac{99}{100} - \frac{99}{100 \times 100} = \frac{9900-99}{100 \times 100} = \frac{9801}{100 \times 100} = \frac{99 \times 99}{100 \times 100}$, vin qui reste dans le baril après la premiere pinte du mêlange tiré, & l'eau est $\frac{1}{100} - \frac{1}{100 \times 100} = \frac{99}{100 \times 100}$: on remplace cette premiere pinte du mêlange par une pinte d'eau $= \frac{1}{100} = \frac{100}{100 \times 100}$; ainsi avant qu'on tire la seconde pinte du mêlange, il y a dans le baril $\frac{99 \times 99}{100 \times 100}$ de vin & $\frac{199}{100 \times 100}$ d'eau; & en tirant cette seconde pinte du mêlange, on tire $\frac{1}{100}$ de chaque partie du vin & de l'eau contenus dans le baril; on tire donc $\frac{99 \times 99}{100 \times 100 \times 100}$ de vin, & $\frac{199}{100 \times 100 \times 100}$ d'eau; il reste donc en vin dans le baril $\frac{99 \times 99}{100 \times 100} - \frac{99 \times 99}{100 \times 100 \times 100} = \frac{99 \times 99 \times 100 - 99 \times 99}{100 \times 100 \times 100} = \frac{99 \times 99 \times 99}{100 \times 100 \times 100}$, & en eau $\frac{199}{100 \times 100} - \frac{199}{100 \times 100 \times 100} = \frac{19900-199}{100 \times 100 \times 100} = \frac{19701}{100 \times 100 \times 100}$. On voit donc par la nature de ce problême, que le vin qui reste après chaque pinte qu'on tire est les $\frac{99}{100}$ de ce qui restoit après avoir tiré la pinte précédente. Donc le vin total, représenté par 1, & les restes,

après avoir tiré successivement chaque pinte, forment une progression géométrique décroissante, dont le premier terme est 1, le second terme $\frac{99}{100}$, qui est égal à la raison de la progression, & le dernier terme $\frac{1}{4}$. On aura donc cette progression décroissante,

$$\div 1, \frac{99}{100}, \frac{99 \times 99}{100 \times 100}, \frac{99 \times 99 \times 99}{100 \times 100 \times 100} \ldots\ldots \frac{1}{4};$$

or ce dernier terme $\frac{1}{4}$ est fait de la raison élevée au degré exprimé par le nombre des termes moins un, multiplié par le premier terme 1, qui ne multiplie ni ne divise. Si donc on divise le logarithme -0.602060 du dernier terme $\frac{1}{4}$ par le logarithme -0.004365 de la raison $\frac{99}{100}$, le quotient $\frac{-0.602060}{-0.004365} = 137{,}92$ environ, exprime (302, *art.* 3, & 316, *art.* 4) le nombre des termes moins un; on doit donc tirer du baril 138 pintes & environ $\frac{92}{100}$ d'une pinte pour réduire le vin au quart, c'est-à-dire, que lorsqu'on aura mis successivement 138 pintes d'eau & environ $\frac{92}{100}$, il y aura dans le baril ou tonneau environ 25 pintes de vin & 75 pintes d'eau. C. Q. F. Dét.

334. PROB. D'un tonneau de 100 pintes de vin on tire journellement une pinte de vin qu'on remplace par une pinte d'eau; déterminer combien il y aura de vin dans le tonneau, après avoir remplacé la 50e pinte.

SOLUTION. On vient de voir dans le problême précédent que les restes de vin successifs forment une progression géométrique décroissante, dont le premier terme est le vin du tonneau exprimé par 1, & le second terme est $\frac{99}{100}$ qui est en même tems la raison de la progression

La queſtion ſe réduit donc à trouver le 50e terme d'une progreſſion géométrique, dont le premier terme eſt 1, & la raiſon $\frac{99}{100}$; ce 50e terme exprimera la quantité de vin qui reſtera dans le tonneau. Or, ce 50e terme eſt égal au premier 1 multiplié par la raiſon $\frac{99}{100}$ élevée à la 49e puiſſance. Ce 50e terme ſera donc $(\frac{99}{100})^{49}$. Si on prend le logarithme de cette quantité, on aura $49 l. \frac{99}{100} = 49 \times -0.004365 = -0.213885$ logarithme qui répond à une fraction. Pour la déterminer, je la multiplie par 10000, en ajoutant ſon logarithme 4.000000 au logarithme -0.213885 de la fraction cherchée ; j'aurai 3.786115, qui répond dans la table au nombre 6111, qui eſt 10000 fois trop grand ; ce nombre devient donc $\frac{6111}{10000} = 0{,}6111$; il y a donc dans le tonneau $\frac{6111}{10000}$ de vin, ou environ 61 pintes de vin, & $\frac{3889}{10000}$ d'eau, ou environ 39 pintes d'eau. C. Q. F. Dét.

335. PROB. Le Gouverneur d'un jeune Seigneur exaltoit la haute naiſſance de ſon pupille, aſſurant qu'il avoit 800 ans de nobleſſe tant du côté paternel que du côté maternel, ſans mêlange de roture du côté des meres ; qu'il en avoit les preuves par titres authentiques, atteſtées par le Généalogiſte de la Cour, qui avoit examiné ces titres avec la plus grande exactitude & le ſcrupule qu'on lui connoît. Un Géomètre qui étoit préſent, dit froidement au Gouverneur, M. le Marquis compte donc, à 4 générations par ſiecle, 32 générations d'aïeux & d'aïeules tous nobles ? Sans doute, repliqua le Gouverneur. Combien le Généalogiſte a-t-il donc trouvé de perſonnes qui aient coopéré directement à la production de M. le Marquis ? Belle queſtion, reprit le Gouver-

neur (qui s'étoit chargé d'enseigner les mathématiques au jeune Marquis), 64 personnes. Le Géomètre répond en souriant, pour moi qui n'ai pas l'honneur d'enseigner M. le Marquis, mais qui sait calculer, je soutiens que 8589934590 personnes ont coopéré directement à la production de M. le Marquis ; qu'ainsi il est à parier que dans cet espace de 800 ans, il y a eu des personnes de tous les rangs, & de tous les métiers qui ont coopéré en légitime mariage à la production de M. le Marquis. Vous professez, prenez la plume & voyons ensemble qui de nous deux a raison.

SOLUTION. M. le Marquis a un pere & une mere ; son pere a eu un pere & une mere, & sa mere autant ; voilà donc 4 personnes nobles qui ont coopéré directement à la production du pere & de la mere de M. le Marquis, par conséquent à la sienne ; chacune de ces 4 personnes a eu un pere & une mere ; donc 8 personnes ont produit ces 4 ; chacune de ces 8 a eu un pere & une mere, conséquemment 16 personnes ont produit les 8 ; ces 16 ont, par la même raison, été produites par 32 personnes ; ces 32 par 64, ainsi de suite, de sorte que ces générations forment cette progression géométrique croissante de 32 termes dont la raison $p = 2$.

$\div\!\div$ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 . . . . g, 32e & dernier terme.

Or, on sait que ce dernier terme g est égal au premier $a = 2$ multiplié par la raison 2 élevée à la 31e puissance (302) ; ainsi $g = a \times p^{31} = 2 \times 2^{31}$; or la 31e puissance de 2 est 2147483648 qui étant multiplié par le premier terme $2 = a$ donne 4294967296 pour la valeur du dernier

terme g. On sait aussi (299) qu'on trouve la somme de tous les termes d'une progression géométrique finie en multipliant le plus grand terme par la raison, ôtant du produit le petit terme, & divisant le reste par la raison moins un, ici par $2-1=1$ qui ne multiplie ni ne divise; on aura donc pour la somme de tous les individus qui ont coopéré à la production de M. le Marquis $\frac{g\times 2-2}{2-1}=g\times 2-2=4294967296\times 2-2=$ 8589934590, nombre des aïeux de M. le Marquis depuis 800 ans jusqu'à lui. Le Gouverneur, étonné & confus, engagea le Géometre à lui donner des leçons pour les rendre à son pupille, &c.

Indiquons la même solution faisant usage des logarithmes, puisque la raison est $2=p=a$ premier terme, la somme de tous les termes de cette progression est égale à la 33e puissance de la raison 2, ôtant du résultat 2 unités; cette somme est donc $s=2^{33}-2$; or, le logarithme de 2^{33} est $33\ l.\ 2=9.933990$ qui répond à environ 8589934592, d'où ôtant 2, on aura, comme ci-dessus, 8589934590 pour le nombre de personnes qui ont coopéré directement à la production de M. le Marquis. C. Q. F. Dét.

336. Les questions qu'on vient de déterminer à l'aide des logarithmes suffisent pour faire connoître leur utilité dans l'arithmétique. Ils ne sont pas moins utiles dans la trigonométrie, & en général dans la pratique de toutes les parties des mathématiques. On verra dans l'algébre une autre méthode de les déterminer. Ajoutons seulement, 1°, que si au lieu d'avoir fait correspondre les

termes de la progreſſion arithmétique ÷ 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. à ceux de la géométrique ∺ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, &c. on s'étoit ſervi de toute autre progreſſion arithmétique ÷ 0, 4, 8, 12, 16, 20, &c., dont le premier terme 0, répondît au terme 1 de la progreſſion géométrique, & qu'on eût déterminé les termes correſpondans de cette progreſſion arithmétique à ceux des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., compris dans la progreſſion géométrique de 10000001 de termes de 1 à 10, de 11 à 100 &c., les termes correſpondans de cette prog. arith. à ceux de la géométrique ſeroient leurs logarithmes ; ainſi on peut former une infinité de ſyſtêmes différens des logarithmes des mêmes nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. qui auront cette propriété que les logarithmes de deux nombres tels que ceux de 3 & de 12 pris dans un ſyſtême, feront entr'eux géométriquement, comme les logarithmes de ces mêmes nombres 3 & 12 pris dans un autre ſyſtême de logarithmes ; car dans deux progreſſions arithmétiques d'un même nombre de termes dont le premier eſt zéro, un terme quelconque de la premiere contient autant de fois la différence qui regne dans la progreſſion que le terme correſpondant de la ſeconde contient la ſienne : donc deux termes correſpondans de deux progreſſions arithmétiques ſont entr'eux géométriquement comme deux autres termes correſpondans des mêmes progreſſions arithmétiques. On voit que 1 : 4 :: 3 : 12 ; or 1 & 4 ſont les logarithmes de 10, & 3 & 12 ſont les logarithmes de 1000, dans ces deux différens ſyſtêmes de logarithmes. Par conſéquent les loga-

rithmes de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. étant trouvés selon un systême quelconque, on peut déterminer les logarithmes des mêmes nombres selon un autre systême par de simples regles de Trois. On fera usage de cette observation dans la suite.

Observons, 2°. qu'on peut transformer toute soustraction en addition, en faisant usage du *Complément Arithmétique*, du nombre qu'on doit ôter, comme on va l'indiquer.

337. DÉF. On appelle *Complément Arithmétique* d'un nombre, ce qui lui manque pour devenir l'unité suivie d'autant de zéros que ce nombre contient de chiffres. Ainsi le complément arithmétique de 92 est 8, parce que $92 + 8 = 100$; celui de 7228 est 2772, parce que $7228 + 2772 = 10000$; celui de 3972102 est 6027898; car leur somme est 10000000. On voit donc qu'en ôtant un nombre de l'unité suivie d'autant de zéros que ce nombre a de chiffres, on a le *complément arithmétique* de ce nombre; or, cela est facile à exécuter sans faire une soustraction effective, puisque c'est ôter le chiffre à droite de 10 & chacun des précédens de 9, ou, ce qui revient au même, on ajoute une unité à chacun des chiffres qui précedent le premier à droite & on l'ôte de 10; conséquemment le *complément arithmétique* de 2374 est 7626; parce que $2 + 7 = 9$, $3 + 6 = 9$, $7 + 2 = 9$, & $4 + 6 = 10$.

D'où il suit que si au lieu d'ôter un nombre d'un autre, on ajoute son complément arithmétique à cet autre nombre, on aura un résultat trop grand de l'unité suivie d'autant de zéros que le nombre qn'on devoit ôter contient de chiffres.

Si on doit ôter 2374 de 343870, & qu'au lieu de cela on ajoute à 343870 le *complément arithmétique* 7626 de ce nombre 2374, on aura 351496 qui aura 10000 unités de trop; le vrai reste sera donc 341496; en effet qui de 343870 ôte 2374, il reste 341496. La raison de cette opération est qu'au lieu de retrancher 2374, comme on le proposoit, on a ajouté son complément arithmétique, c'est-à-dire, 10000 moins 2374: ce qui est faire à la fois la soustraction proposée, & une augmentation de 10000, c'est-à-dire, d'une dixaine par rapport au premier chiffre à gauche du nombre à soustraire; il faut donc à la fin de l'opération retrancher de la somme cette dixaine, ou une unité du rang qui laisse autant de chiffres à sa droite qu'il y en a dans le nombre du complément arithmétique duquel on s'est servi.

De même, si au lieu d'ôter d'un nombre quelconque deux ou plusieurs autres nombres composés chacun d'un même nombre de chiffres, on lui ajoute leur *complément arithmétique*, il faut ôter du résultat autant d'unités du rang qui laisse à sa droite autant de chiffres qu'il y en a dans un de ces nombres, qu'il y a eu de complémens employés dans l'opération.

Par exemple, si on ajoute à	1980456
le complément arith. de 897523 qui est	102477
celui de . . . . 321702. . . .	678298
& celui de. . . . . 253456. . . .	746544
on a pour résultat	3507775
qui est trop grand de 3000000; il est donc	507775

En effet, la ſomme des 3 nombres 897523, 321702 & 253456 eſt 1472681, qui étant ôtée du nombre propoſé 1980456, il reſte 507775. Ainſi des autres.

338. On peut faire uſage du *complément arithmétique* dans l'application des logarithmes à la trigonométrie, & au calcul en général: on s'en ſert principalement dans les logarithmes de fraction, pour éviter d'avoir des logarithmes négatifs. Il ſuffira de ſe ſouvenir, que la caractériſtique eſt trop forte, d'autant de fois 10 unités qu'on s'eſt ſervi de complémens arithmétiques. *Par exemple*, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{7}$, j'ajoute au log. du numérateur 3, qui eſt 0,477121
le complément arith. du log. 0.845098
du dénominateur 7, qui eſt 9,154902

le réſultat eſt. 9,632023

Dont la caractériſtique eſt trop grande de 10 unités.

On trouvera (325) que ce logarithme 9.632023 répond à 4285275147 qui eſt 10000000000 fois trop grand. Ce nombre devient donc . . . . 0,4285275147 ou 0,42853 en ſe contentant de 5 décimales. Ainſi des autres.

Si on n'avoit point fait uſage du *complément arithmétique*, on auroit trouvé pour le logarithme de la fraction $\frac{3}{7}$ — 0.367977 qu'il faut chercher dans les tables avec la caractériſtique 3; pour cet effet on ôte ce logarithme négatif — 0.367977 de 4.000000 logarithme de 10000, le reſte eſt 3.632023 qui répond environ à 4285,3 qui eſt 10000 fois trop grand. La valeur de la fraction $\frac{3}{7}$ eſt donc $\frac{42853}{100000}$ = 0,42853 comme ci-deſſus.

De même, si on veut savoir quel est le quotient de $\frac{51 \times 57}{19}$, en se servant des logarithmes, on ajoutera aux logarithmes de 51 & de 57 le complément arithmétique du logarithme de 19, & on aura log. de 51 = ... 1.707570

log. de 57 = ... 1.755875

complément arith. du log. 1.278754

de 19, qui est 8.721246

résultat 12.184691

dont la caractéristique est trop grande de 10 unités. On a donc 2.184691 pour le logarithme cherché, qui, dans la table, répond à 153; en effet, $\frac{51 \times 57}{19} = \frac{2907}{19} = 153$. Ainsi des autres.

Si on veut élever une fraction $\frac{3}{7}$ au cube, *par exemple*, en se servant du complément arith. & des logarithmes, il faut ajouter au logarithme de 3, qui est 0.477121

le complément arith. du log. 0.845098

du dénominateur 7 . . . . 9.154902

résultat 9.632023

qu'il faut multiplier par 3, exposant

du cube, on aura 28.896069

logarithme dont la caractéristique est trop grande de 30 unités, parce que ce log. 28.896069 contient 3 fois le complément arith. de 7; or, qui de la caractéristique 28 de ce log. 28.896069 ôte 30, il reste — 2; ce logarithme a donc une caractéristique négative, & ses décimales positives. On indique qu'un logarithme a sa caractéristique negative, & ses décimales positives, en mettant un petit trait sur la caractéristique. On l'exprime

ainsi, — $\bar{2}$.896069. Pour trouver à quel nombre répond ce logarithme, j'augmente sa caractéristique de 5 unités; j'ai 3.896069, qui répond dans la table des logarithmes au nombre 7872 environ, qui est 100000 fois trop grand, parce que j'ai ajouté 5 unités à la caractéristique; j'ai donc $\frac{7872}{100000}$ = 0,07872 pour le vrai nombre qui répond au logarithme — $\bar{2}$.896069; ainsi le cube de la fraction $\frac{3}{7}$ est à peu près 0,07872; en effet $(\frac{3}{7})^3 = \frac{27}{343} =$ 0,07872 environ; ainsi des autres.

Il est bon d'observer que ce n'est que lorsqu'on fait usage du complément arithmétique que l'on trouve des logarithmes dont la caractéristique est négative & les décimales positives. Reprenons notre exemple dans lequel il s'agissoit d'élever la fraction $\frac{3}{7}$ au cube. J'ôte le logarithme 0.845098 du dénominateur 7, du log. 0.477121 du numérateur 3; j'ai un reste négatif — 0.367977 dont le triple — 1,103931 est entiérement négatif, & est le logarithme du cube de la fraction $\frac{3}{7}$. J'ôte ce logarithme — 1.103931 du logarithme 5.000000 de 100000; j'ai 3.896069 qui répond à 7872 qui est 100000 fois trop grand; j'ai donc $\frac{7872}{100000}$=0,07872 comme ci-dessus.

Si on veut tirer la racine quelconque d'une fraction donnée, il faut 1° ajouter le complément arithmétique du logarithme du dénominateur au logarithme du numérateur; on a pour résultat un logarithme dont la caractéristique est trop grande de 10 unités. On lui ajoutera (1) autant de

(1) La raison de cette addition est que si on divisoit tout de suite par l'exposant de la racine le logarithme trouvé au moyen du complément arithmétique, on au-

dixaines moins une que l'exposant de la racine qu'on demande a d'unités; on aura un log. dont la caractéristique contiendra autant de dixaines de trop que l'exposant de la racine contient d'unités; 2°. on divisera ce logarithme par l'exposant de la racine, le quotient sera un logarithme dont la caractéristique sera de 10 unités trop grande; ainsi on en ôtera 10, & si le reste est positif on n'aura qu'à le chercher dans la table (325).

Si le reste est négatif, on aura un logarithme dont la caractéristique sera négative, & les décimales positives; & on ajoutera autant d'unités à cette caractéristique négative qu'il en faudra pour que le log. ait 3 pour caractéristique; enfin, on cherchera dans la table à quel nombre ce logarihme répond, on divisera ce nombre par l'unité suivie d'autant de zéros qu'on aura ajouté d'unités à la caractéristique négative; le résultat sera la racine cherchée.

Par exemple, proposons-nous de tirer la racine 5e de la fraction $\frac{243}{1024}$.

---

roit un logarithme dont la caractéristique seroit trop grande d'un nombre d'unités, exprimé par une fraction, dont le numérateur est 10 & le dénominateur l'exposant de la racine, fraction qui souvent ne contiendroit pas un nombre exact d'unités. Dans l'exemple qu'on donne ici, on pourroit se passer d'ajouter 40 à la caractéristique, & diviser tout de suite le logarithme 9.375306 par l'exposant 5 de la racine, on auroit eu un logarithme 1.875061, dont la caractéristique auroit été trop grande de $\frac{10}{5}$ d'unités ou de 2 unités; ôtant ces 2 de la caractéristique, on auroit eu le logarithme — $\bar{1}$.875061, que donne l'opération prescrite.

Au

Au log. du numérateur 243, qui est	2.385606
j'ajoute le complément arith. du log. 3.010300 de 1024, qui est. . . .	6.989700
résultat	9.375306
auquel j'ajoute 4 dixaines, exposant de la racine 5e moins un	40
résultat	49.375306
dont le 5^e	9.875061

est un logarithme, dont la caractéristique est trop grande de 10 unités; elle est donc $-\bar{1}$. Ainsi le logarithme de la racine 5e de $\frac{243}{1024}$ est $-\bar{1}.875061$; j'ajoute 4 à la caractéristique, j'ai 3.875061, qui répond à 7500, qui est 10000 fois trop grand. La racine 5e de $\frac{243}{1024}$ est donc $\frac{7500}{10000} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; en effet, $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{243}{1024}$; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

Si on veut trouver la racine cinquieme de la même fraction $\frac{243}{1024}$, sans faire usage du complément arithmétique, on ôte le logarith. 3.010300 du dénominateur 1024, du logarithme 2.385606 du numérateur 243, on a un reste négatif $-$ 0.624694, qui est le logarithme de la fraction $\frac{243}{1024}$; je divise ce logarithme $-$ 0.624694 par 5 exposant de la racine cinquieme; j'ai $-$ 0.124939 qui est le logarithme de la racine 5e de la fraction proposée $\frac{243}{1024}$; je lui ajoute le logarithme 4.000000 de 10000, j'ai $4.000000 - 0.124939 = 3.875061$, qui répond à 7500, qui est 10000 fois trop grand à cause du logarithme 4.000000 de 10000 qu'on a joint à celui de la racine 5^e $= 9.124939$ de la fraction $\frac{243}{1024}$. Cette racine est

donc $\frac{7500}{10000} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, comme ci-dessus. D'après ces exemples, le lecteur peut voir qu'il y a souvent plus d'embarras que d'avantages à faire usage du complément arithmétique dans la pratique des logarithmes.

DES COMBINAISONS SIMPLES.

339. DÉF. J'APPELLE *combinaison simple* la somme de tous les résultats que peuvent fournir plusieurs grandeurs, tant en les considérant séparément qu'en les prenant & les liant 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, 5 à 5, &c. sans avoir égard à l'ordre suivant lequel elles sont liées.

Par exemple, les 4 lettres *a*, *b*, *c*, *d*;

Etant considérées une à une donnent ces comb. simples.	Etant liées 2 à 2, elles donnent,	Etant liées 3 à 3 elles donnent les combin. suivantes.	Etant liées 4 à 4, elles donnent,
	1e .. *ab*	1e .. *abc*	1e .. *abcd*
1e .. *a*	2e .. *ac*	2e .. *abd*	
2e .. *b*	3e .. *ad*	3e .. *acd*	
3e .. *c*	4e .. *bc*	4e .. *bcd*	
4e .. *d*	5e .. *bd*		
	6e .. *cd*		

On voit que le nombre des termes de la combinaison simple de 4 lettres *a*, *b*, *c*, *d*, est 15, savoir 4 termes d'une lettre, 6 termes de 2 lettres, 4 termes de 3 lettres & un terme de 4 lettres.

Pour trouver en général la somme des combinaisons simples, il faut faire attention que si on n'a qu'une lettre *a*, il n'y a qu'une combinaison; ainsi elle est exprimée par 1.

2, a & b, cette seconde lettre b en
premiere, donne le double de la
le que donnoit cette premiere
lace de a, on a, a & ba; elle
re existence b; la combi-
grandeurs a & b, est donc
qui exprime en effet les diffé-
e la combinaison simple de a & b
nombre de 3 : a, b, ab.

a une 3e grandeur c, il est clair qu'elle
entera les termes de la combinaison simple
précédente a, b, ab; 1°. de son existence c; 2°. d'autant de termes de plus que cette combinaison en contient, en se joignant à chacun des résultats; ce qui donne ac, bc, abc. On aura donc pour la somme des termes de la combinaison simple de 3 grandeurs, cette formule $3.2 + 1 = 7$: savoir, a, b, c, ab, ac, bc, abc, c'est-à-dire, que le nombre des termes de la combinaison simple de 3 grandeurs est double de celui de 2 grandeurs plus un. Ainsi de suite.

D'où en général la combinaison simple d'un nombre de lettres quelconque, égale le double de celle d'un nombre de lettres d'un terme de moins, plus un.

Ainsi la combinaison simple de $n =$ celle de $(n-1) \times 2 + 1$; & en prenant garde que l'unité $\times 2 + 1$ est la même chose que 2×2 moins un, la formule se changera en celle-ci.

une grand. $=$ 1.

2 . . . . . . $= 1.2+1 = 2.2-1 = 2^2-1 = 3$

3 . . . . . . $= 3.2+1 = 2^3-2+1 = 2^3-1 = 7$

4 . . . . . . $= 7.2+1 = 2^4-2+1 = 2^4-1 = 15$

5 . . . . . . $= 15.2+1 = 2^5-2+1 = 2^5-1 = 31$

n . . . . . $= 2^n - 1$, formule générale du nombre des termes de la combinaiſon ſimple d'un nombre quelconque de grandeurs, déſigné par n; ſi $n = 10$, le nombre des termes de la combinaiſon ſimple ſera $2^n - 1 = 2^{10} - 1 = 1023$; ainſi des autres. C. Q. F. Dét.

DES PERMUTATIONS.

340. DÉF. J'APPELLE *permutations proprement dites*, les changemens d'ordre qu'on peut faire ſubir aux différens réſultats que fournit la combinaiſon ſimple, en conſidérant pluſieurs choſes ou 2 à 2, ou 3 à 3, ou 4 à 4, &c. (1).

(1) Il eſt à remarquer que dans *ces permutations*, on comprend non ſeulement les changemens d'ordre qu'on fait ſubir aux réſultats différens de la combinaiſon ſimple, mais encore ces réſultats primitifs eux-mêmes : ainſi, ſi on demande de combien de permutations ſont ſuſceptibles quatre grandeurs priſes deux à deux ; on entend par-là tous les arrangemens différens, de deux lettres chacun, qu'on peut faire avec ces quatre grandeurs ; & par conſéquent les réſultats que donne la combinaiſon ſimple en les liant deux à deux, plus les changemens d'ordre qu'on peut faire ſubir à ces réſultats différens.

Ainsi si on a les 4 mêmes lettres a, b, c, d,

En les considérant une à une, on a les combinaisons simples.	Etant liées 2 à 2, on a les combinaisons simples.	de plus changemens d'ordre.	Etant liées 3 à 3, on a les combinaisons simples.	de plus changemens d'ordre.	Etant liées 4 à 4, on a les combinaisons simples	de plus changemens d'ordre.
a	*ab* . . .	*ba*		*acb*	*abcd*	*abdc*
b	*ac* . . .	*ca*		*cab*		*acbd*
c	*ad* . . .	*da*	*abc* . . .	*cba*		*acdb*
d	*bc* . . .	*cb*		*bac*		*adbc*
Et il est évident qu'il n'y a point de changemens d'ord.	*bd* . . .	*db*		*bca*		*adcb*
$4 = n$	*cd* . . .	*dc*		*adb*		*badc*
	Tot. 12 $= 4.(4-1)$ $= n.(n-1)$ formule des permutations d'un nombre de grandeurs n, prises 2 à 2, & $\frac{n.(n-1)}{1.2}$, formule de la combinais. simple d'un nombre n de grandeurs prises 2 à 2 seulement.			*dab*		*bacd*
			abd . . .	*dba*		[illegible] *ad*
				bad		*bcda*
				bda		*bdac*
				adc		*bdca*
				dac		*cabd*
			acd . . .	*dca*		*cadb*
				cad		*cbad*
				cda		*cbda*
				bdc		*cdab*
				lbc		*cdba*
			bcd . . .	*lcb*		*dabc*
				bd		*dacb*
				cdb		*dbac*
			Total 24 $= 4.3.2.$ $= 4.(4-1).(4-2)$ $= n.(n-1).(n-2)$, formule des permutat. d'un nombre n de grandeurs prises 3 à 3, & . . $\frac{n(n-1).(n-2)}{1.2.3}$, formule de la combinaison simple d'un nombre n de grandeurs prises 3 à 3 seulement.			*dbca*
						dcab
						dcba
					Total 24 $= 4.3.2.1 = 4.(4-1).(4-2).(4-3)$, ou bien . . . . $n.(n-1).(n-2).(n-3)$, formule des permutations d'un nombre n de grandeurs prises 4 à 4	

& $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.}$, formule de la combinaison simple d'un nombre n de grandeurs prises 4 à 4 seulement, &c.

Ainsi les formules particulieres des permutations d'un nombre n de grandeurs considérées une à une, ou prises 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, &c. sont,

Formules des permutations particulieres.

une à une n,
2 à 2 . . $n.(n-1)$,
3 à 3 . . $n.(n-1).(n-2)$,
4 à 4 . . $n.(n-1).(n-2).(n-3)$,
5 à 5 . . $n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)$.
6 à 6 . . $n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)$,
7 à 7 . . $n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5).(n-6)$,
8 à 8 . . $n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5).(n-6).(n-7)$;
9 à 9 . . $n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5).(n-6).(n-7).(n-8)$,
c à c . . $n.(n-1).(n-2).(n-3) \ldots\ldots\ldots\ldots \times(n-(c-1))$.

On peut suivre ces formules aussi loin qu'on voudra; puisque chacune est faite de n multiplié successivement par $n-1$, par $n-2$, ... par n, moins le nombre de fois qu'on prend ces grandeurs tant à tant diminué d'une unité. La formule des permutations d'un nombre quelconque de grandeurs n prises 16 à 16 est n multiplié successivement par $n-1$, $n-2$, &c. jusqu'à $n-15$. Si on les prend 2 à 2, la formule est $n.(n-1)$.

On voit donc que 12 grandeurs $= n$; a, b, c, d, f, g, h, l, k, m, p, q, peuvent se disposer ou se permuter, prises 2 à 2 de $n.(n-1) = 12.11 = 132$ manieres, & prises 12 à 12 de $12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1. = 479001600$ arrangemens différens, chacun de 12 grandeurs.

D'où l'on déduit que si on a un corps de troupe composé de 12 brigades, on peut les ranger en bataille sur une même ligne de 479001600 manieres différentes.

340A. On appelle aussi ordinairement *permutations*, non seulement les différens arrangemens qu'on peut donner aux résultats d'une combinaison simple, mais encore tous les différens arrangemens suivant lesquels on peut énoncer ou disposer entr'elles plusieurs choses en les considérant toutes ensemble.

Ainsi, on entend communément par ce mot *permutations* toutes les manieres possibles suivant lesquelles on peut arranger plusieurs choses, de sorte cependant que chaque arrangement contienne toutes ces choses. La permutation de 8 grandeurs est 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320 arrangemens de chacun de 8 grandeurs; ainsi 8 personnes peuvent se placer autour d'une table de 40320 manieres différentes.

La raison pour les permutations des quantités contenues dans n, prises 2 à 2 est que chaque quantité ne peut se combiner qu'avec le nombre des autres; ainsi n ne peut se combiner qu'avec $n - 1$; donc les changemens d'ordre des grandeurs contenues dans n, prises 2 à 2 seront exprimés par cette formule $n.(n - 1)$.

Pour faire voir que cette formule $n.(n - 1)$ des changemens d'ordre est exacte, prenons 6 grandeurs désignées par ces lettres a, b, c, d, f, g, & formons-en tous les arrangemens de deux quantités. On trouvera, 1°. que a se combine de deux manieres avec chacune des cinq autres b, c, d, f, g. En effet, on aura ab, ba; ac, ca; ad, da; af, fa; ag, ga = 10 termes.

b ayant déjà été combiné avec *a*, ne peut plus se combiner qu'avec les quatre lettres restantes *c*, *d*, *f*, *g*, & par conséquent ne fournira que les 8 termes suivans *bc*, *cb*; *bd*, *db*; *bf*, *fb*; *bg*, *gb* = 8
c, par la même raison, n'en fournira que six, *cd*, *dc*; *cf*, *fc*; *cg*, *gc* . . . . = 6
d en fournira quatre *df*, *fd*; *dg*, *gd* . . . . = 4
f en fournira deux *fg*, *gf*. . . . . = 2

Total des termes de la permutation de six grandeurs prises 2 à 2 . . . . =30

Or la formule des permutations de 6 grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, prises 2 à 2, est $n.(n-1) = 6.(6-1) = 6.5 = 30$. résultat pareil.

340B. Si on regarde avec les Géomètres ces arrangemens de deux grandeurs *ab*, *ba*, *ac*, *ca*, &c. comme des produits de ces grandeurs prises 2 à 2, & que l'on observe que le produit *ab* ne differe pas de *ba*, celui *ac*, de *ca*, on en conclura que le nombre des produits différens de deux dimensions qu'on peut former avec un nombre quelconque n de grandeurs, n'est que la moitié des changemens d'ordre de ces grandeurs prises 2 à 2; ainsi la formule des produits différens de deux dimensions qu'on peut faire avec un nombre n de grandeurs est $\frac{n.(n-1)}{1.2}$.

On trouvera qu'en prenant ces arrangemens $n.(n-1)$ de 2 quantités avec une 3[e], ce ne pourra être qu'avec $n-2$; ainsi les permutations d'un nombre quelconque n de grandeurs prises 3 à 3 donneront cette formule $n.(n-1).(n-2)$, & si on fait attention que dans chaque arrangement *ab* de deux grandeurs une 3[e] *c* occupe 3 places *cab*, *acb*, *abc*, qui ne sont que le

même produit; car $cab = acb = abc$, on conclura que les produits différens d'un nombre n de grandeurs prises 3 à 3 seront exprimés par cette formule $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$. Si $n = 5$, savoir a, b, c, d, f, on aura $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = \frac{60}{6} =$ 10 termes, *abc*, *abd*, *abf*, *acd*, *acf*, *adf*, *bcd*, *bcf*, *bdf*, *cdf*, ou produits différens. Ces mêmes 5 lettres a, b, c, d, f donnent 20 permutations de 2 lettres $n.(n-1) = 5.4. = 20$, & dix produits différens, ou dix *ambes*, *ab*, *ac*, *ad*, *af*, *bc*, *bd*, *bf*, *cd*, *cf*, *df* $= \frac{n.(n-1)}{1.2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$.

Si l'on fait attention que chaque changement d'ordre d'un nombre n de grandeurs prises 3 à 3 ne peut s'arranger qu'avec une 4e grandeur, on conclura que les permutations qu'on peut former avec un nombre n de grandeurs prises 4 à 4 seront exprimées par cette formule $n.(n-1).(n-2).(n-3)$, & comme dans chaque arrangement de 3 grandeurs, une 4e grandeur occupe 4 places, savoir, après la 3e, entre la 3e & la seconde, entre la seconde & la premiere, & avant la premiere on voit que d se lie au résultat abc de 4 manieres, *abcd*, *abdc*, *adbc*, *dabc*; mais ces 4 arrangemens ne donnent que le même produit; on conclura donc que le nombre des produits différens qu'on peut former avec un nombre quelconque n de grandeurs prises 4 à 4 est exprimé par cette formule $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}$. Si $n = 5$ grandeurs a, b, c, d, f, on aura $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4} = \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}, = \frac{120}{24} = 5$, produits différens, ou 5 *quaternes*, savoir, *abcd*, *abcf*, *abdf*, *acdf*, *bcdf*.

Par un ſemblable raiſonnement, on trouvera que la formule des permutations d'un nombre n de grandeurs priſes 5 à 5 eſt . . . . $n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)$, & que la formule des produits différens d'un nombre de grandeurs en les prenant 5 à 5 eſt $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5}$. Si $n = 5$ grandeurs a, b, c, d, f, on aura . . . . $\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = 1 = abcdf$; ainſi 5 grandeurs ne donnent qu'un ſeul produit de 5 quantités, *un quine*.

DES PERMUTATIONS COMPLETTES.

341. DÉF. J'APPELLE *permutation complette* celle où l'on conſidere chaque grandeur contenue dans n, une à une : ou bien où on les prend 2 à 2 & le quarré de chaque grandeur; 3 à 3 & le cube de chaque grandeur; 4 à 4 & la 4e puiſſance de chaque grandeur; 5 à 5 & la 5e puiſſance de chaque grandeur contenue dans n &c. On déduit de cette définition, 1°. que le nombre des termes ou des réſultats des grandeurs contenues dans n conſidérées une à une eſt exprimé par n.

2°. Que le nombre des termes ou des permutations complettes des grandeurs contenues dans n priſes 2 à 2 eſt exprimé par n^2; car alors chaque grandeur ſe combine non-ſeulement avec les autres, mais encore avec elle-même : ainſi 2 grandeurs a & b donnent ces 4 arrangemens aa, ab, ba, bb, quarré de $n = 2$. Si $n = 3$, a, b, c, en les prenant 2 à 2, on aura ces 9 permutations complettes aa, ab, ba, bb, ac, ca, bc,

cb, cc, ou $n^2 = 3^2$; ainſi n^2 eſt la formule des permntations complettes d'un nombre n de grandeurs priſes 2 à 2, en y comprenant les quarrés de chaque grandeur.

3°. On trouvera que n^3 eſt la formule des grandeurs priſes 3 à 3; car 2 grandeurs a & b donneront cet huit arrangemens de 3 dimenſions *aaa*, *aab*, *baa*, *aba*, *bba*, *abb*, *bab*, b^3; de même 3 grandeurs a, b, c donneront $27 = n^3$ arrangemens différens de 3 dimenſions *aaa*, *aab*, *baa*, *aba*, *abb*, *bba*, *bab*, *bbb*, *aac*, *caa*, *aca*, *bac*, *bca*, *cab*, *abc*, *acb*, *cba*, *bbc*, *bcb*, *cbb*, *acc*, *cac*, *cca*, *bcc*, *cbc*, *ccb*, *ccc*.

4°. On trouvera de même que la formule d'un nombre n de grandeurs priſes 4 à 4 en y comprenant les 4es puiſſances de chaque grandeur, eſt n^4; que celle de ces grandeurs priſes 5 à 5, y comprenant les 5es puiſſances de chaque grandeur, eſt n^5 &c.

On aura donc cette ſuite de formules des permutations complettes,

n . . . grandeurs priſes une à une,
n^2 . . . 2 à 2, y comprenant les quarrés de chaque grandeur,
n^3 . . . 3 à 3, y comprenant leurs cubes,
n^4 . . . 4 à 4 . . . leurs 4es puiſſances,
n^5 . . . 5 à 5 . . . leurs 5es puiſſances,
n^6 . . . 6 à 6 . . . leurs 6es puiſſances,
n^n . . . n à n . . . leurs puiſſ. exprim. par n.



DES COMBINAISONS COMPLEXES.

342. DÉF. J'APPELLE *combinaison complexe* la somme de tous les arrangemens qu'on peut donner à un nombre quelconque n de grandeurs considérées une à une, & prises 2 à 2, 3 à 3, &c. de toutes les façons possibles; ou celle qui renferme les combinaisons simples, & tous les changemens d'ordre des différens résultats de cette combinaison simple.

On voit évidemment d'après cette définition que la formule de la combinaison complexe n'est autre chose que la somme des formules des permutations proprement dites, que cette combinaison renferme. Ainsi,

1°. Deux grandeurs a & b donnent pour combinaison complexe, les permutations de ces grandeurs une à une, plus celle des grandeurs 2 à 2; c'est donc $n + n. (n - 1) = 2 + 2.1 = 4$ formule générale des termes de la combinaison complexe de deux grandeurs a & b, qui donne en effet ces quatre termes, a, b, ab, ba. La combinaison simple de ces mêmes grandeurs n'eût donné que les trois produits a, b & ab.

2°. Trois grandeurs a, b, c donnent, par la même raison, pour le nombre des termes de la combinaison complexe, cette formule $n + n. (n - 1) + n. (n - 1).(n - 2) = 3 + 3.2 + 3.2.1 = 15 = a, b, c; ab, ac, ba, bc, ca, cb; abc, acb, bac, bca, cab, cba.$

Si $n = 6$; la combinaison complexe de ces six grandeurs a, b, c, d, e, f, g, considérées une

à une, & prises 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, 5 à 5, 6 à 6, est exprimée par cette formule,

$n + n.(n-1) + n.(n-1).(n-2) + n.(n-1).(n-2).(n-3) + n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4) + n.(n-1).(n-2.).(n-3).(n-4).(n-5)$: on aura donc

6 combinaisons d'une grandeur, *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*.

30	permutations prises	2 à 2,
120	....	3 à 3,
360	....	4 à 4,
720	....	5 à 5,
720	....	6 à 6,

2166, somme des termes de la combinaison complexe de six grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*.

DES COMBINAISONS COMPLETTES.

343. DÉF. J'APPELLE *combinaison complette* celle qui comprend la somme des termes de la permutation complette d'un nombre quelconque *n* de grandeurs (1).

344. THÉOR. La somme de tous les termes de la combinaison complette d'un nombre *n* de grandeurs est égale à la somme des termes de la

(1) Ainsi *la combinaison complette* differe de la *combinaison complexe*, de la même maniere que les *permutations complettes* different des *permutations proprement dites*: c'est-à-dire, que dans la combinaison complette les grandeurs se combinent avec elles mêmes comme dans les permutations complettes, ce qui n'arrive pas dans les permutations proprement dites, ni dans la combinaison complexe, qui n'est que la somme de ces permutations.

le coëfficient du 4e terme désigne le nombre des produits des grandeurs prises 3 à 3, &c., on a $a + b = 1a + 1b$; or si l'on éleve le binome $a + b$ ou $1a + 1b$ au degré quelconque n, on éleve en même tems le binome $1 + 1$ des coëfficiens des termes du binome $a + b$ au même degré, & on a,

Exposant,

$n =$ 1, 1 + 1 . . . binôme ;

$n =$ 2, 1 + 2 + 1 . . . quarré du binôme ;

$n =$ 3, 1 + 3 + 3 + 1 . . . cube, ou 3e puissance ;

$n =$ 4, 1 + 4 + 6 + 4 + 1 . . . 4e puissance,

$n =$ 5, 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 . . . 5e puissance,

$n =$ 6, 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 . . . 6e puissance ;

$n =$ 7, 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 . . . 7e puissance ;

$n =$ 8, 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 . . . 8e puissance

$n =$ 9, 1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 . . . 9e puiss.

$n =$ 10, 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 . . 10e p.

On peut continuer ces formules aussi loin qu'on voudra.

En voici l'explication. La premiere colonne des unités, désigne que le premier terme du binome élevé à un degré quelconque a l'unité pour coëfficient. Le second terme de chaque puissance représente le nombre des grandeurs prises une à une. *Par exemple*, la 10e puissance du binome $1 + 1$ désigne dans son second terme 10, que 10 grandeurs se combinent une à une de 10 manieres; le 3e terme 45 indique que 10 grandeurs donnent 45 produits differens de 2 dimensions ou de 2 grandeurs; le 4e terme 120 indique que 10 grandeurs donnent 120 produits differens de 3 grandeurs; le 5e terme 210 indique que 10 grandeurs donnent 210 produits differens chacun de 4 grandeurs;

grandeurs ; le 6e terme 252 indique que 10 grandeurs donnent 252 produits différens chacun de 5 grandeurs ; le 7e 210 indique que 10 grandeurs donnent 210 produits différens de 6 grandeurs ; le 8e 120 indique que 10 grandeurs fournissent 120 produits différens chacun de 7 grandeurs ; le 9e terme 45 indique que 10 grandeurs donnent 45 produits différens chacun de 8 grandeurs ; le 10e terme 10 indique que 10 grandeurs donnent 10 produits différens chacun de 9 grandeurs ; le 11e terme 1 indique que 10 grandeurs ne donnent qu'une combinaison simple de 10 grandeurs, c'est-à-dire, que 10 grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *p*, donnent les combinaisons simples ou les produits différens contenus dans la table ci-dessous.

Savoir,	10 . . .	prises une à une,
	45	2 à 2,
	120	3 à 3,
	210	4 à 4,
	252	5 à 5,
	210	6 à 6,
	120	7 à 7,
	45	8 à 8,
	10	9 à 9,
	1	10 à 10,

1023, nombre des termes de la combinaison simple de 10 grandeurs.

348. PROB. Déterminer combien il y a d'ambes, de ternes, de quaternes & de quines dans les 90 numéros de la Lotérie Royale de France.

SOLUTION. Dans ce cas, le nombre des grandeurs n=o. On aura, 1°. pour les combinai-

ſons ſimples, ou produits différens de deux grandeurs, cette formule $\frac{n.(n-1)}{1.2} = \frac{90.89}{1.2} = 4005$ ambes. C. Q. F. 1°. Dét.

2°. La formule des ternes eſt $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} = \frac{90 \times 89 \times 88}{1.2.3} = 117480$ ternes. C. Q. F. 2°. Dét.

3°. La formule des quaternes eſt .... $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4} = \frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2555190$ quaternes. C. Q. F. 3°. Dét.

4°. La formule des quines eſt .... $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5} = \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 43949268$ quines. C. Q. F. 4°. Dét.

Il y a donc 4005 ambes, 117480 ternes, 2555190 quaternes, 43949268 quines; & par conſéquent il y a 43949268 à parier contre un qu'une perſonne qui prend un quine à la loterie perdra.

DES NOMBRES FIGURÉS

OU ORDINAUX.

349. DÉF. LES nombres figurés ſont des ſuites de nombres, dont la premiere eſt la ſuite des unités, c'eſt-à-dire, que chaque terme eſt l'unité; dans chacune des autres ſuites, chaque terme eſt la ſomme de tous les termes de la ſuite précédente qui répondent juſqu'à lui, comme on voit dans la table ſuivante.

Table des nombres figurés.

1er ordre	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	ſuite des unités.
2e ordre	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	des nomb. nat.
3e ordre	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	nomb. triangul.
4e ordre	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,	165,	nomb. pyram.
5e ordre	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,	495,	
6e ordre	1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,	792,	1287,	
7e ordre	1,	7,	28,	84,	210,	462,	924,	1716,	3003,	
8e ordre	1,	8,	36,	120,	330,	792,	1716,	3432,	6435,	
9e ordre	1,	9,	45,	165,	495,	1287,	3003,	6435,	12870.	

350. Il ſuit de cette formation, 1°. que ſi on exprime par n le *quantieme* terme d'un ordre quelconque, ou le rang qu'il occupe, & par m l'ordre, 1°. le nombre ordinal, dont l'ordre eſt marqué par m & le rang par n, eſt égal au nombre ordinal, dont le rang eſt marqué par m & l'ordre par n, c'eſt-à-dire, que le 7e terme 84 du 4e ordre eſt égal au 4e terme 84 du 7e ordre; que le 9e terme 1287 du 6e ordre eſt égal au 6e terme 1287 du 9e ordre, &c.

2°. Que chaque premier terme de ces différens ordres eſt l'unité, & que le ſecond terme eſt égal à l'expoſant de l'ordre; le ſecond terme du 3e ordre eſt 3; le ſecond du 4e eſt 4; celui du 7e ordre eſt 7; celui du 8e ordre eſt 8 &c.

3°. Que chaque terme d'un ordre quelconque étant fait de la ſomme des termes correſpondans de l'ordre inférieur précédent, doit avoir une formule particuliere, dans laquelle le quantieme, ou le rang n qu'il occupe doit entrer, de même que l'expoſant de cet ordre inférieur précédent; cela poſé, examinons d'abord, quelle peut être la formule qui repréſentera chaque terme du ſecond ordre, on trouvera aiſément que le rang n

que le terme occupe, ya la valeur de ce terme; ainsi la formule pour trouver chaque terme du second ordre est n.

Pour trouver la formule qui détermine chaque terme du 3e ordre, j'observe que chaque terme de ce 3e ordre est fait des termes d'une progression arithmétique, dont le premier terme est 1, & dont le dernier terme est le rang n, qui désigne en même tems le nombre des termes; or, la somme des termes d'une pareille prog. est représentée par $\frac{n.(n+1)}{2}$; donc $\frac{n.(n+1)}{2}$ est la formule qui fixe chaque terme du 3e ordre, dont n indique le rang que ce terme occupe; & si l'on fait attention que 2 est l'exposant du second ordre, on pourra transformer la formule $\frac{n.(n+1)}{2}$ de chaque terme du 3e ordre en celle-ci $\frac{n.(n+2-1)}{2}$ $= \frac{n.(n+m-1)}{m}$; de sorte que si on désigne par X un terme du rang n du 3e ordre, on aura cette équation $X = \frac{n.(n+m-1)}{m}$; c'est-à-dire, que l'expression générale ou la fraction $\frac{n+m-1}{m}$, multipliant un terme quelconque de l'ordre m & du rang n, donnera le terme correspondant de l'ordre suivant $m+1$; & comme tout terme du 3e ordre est exprimé par $\frac{n.(n+1)}{2}$, on aura le terme correspondant du 4e ordre $X = \frac{n.(n+1)}{2} \times \frac{(n+m-1)}{m} = \frac{n.(n+1)(n+2)}{2.3}$, formule pour trouver les termes du 4e ordre, dans laquelle n désigne le rang du terme qu'on veut avoir; de sorte que si n

$= 8$, on aura le 8e terme $X = \frac{8.9.10}{2.3} = 120$;
en effet, le 8e terme du 4e ordre est 120.

Si on multiplie la formule $\frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}$ des termes du 4e ordre par la fraction $\frac{n+m-1}{m} = \frac{n+3}{4}$, on aura la formule des termes du 5e ordre, savoir,

$$\frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3} \times \frac{(n+m-1)}{m} = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{2.3.4};$$

si $n = 6$, on aura $X = \frac{6.7.8.9}{2.3.4} = 126$, 6e terme du 5e ordre.

On trouvera par un semblable procédé que la formule pour déterminer un terme quelconque du 6e ordre, dont le rang est désigné par n, est $X = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).(n+4)}{2.3.4.5}$; si $n = 8$, le 8e terme du 6e ordre est $X = \frac{8.9.10.11.12}{2.3.4.5} = 792$.

On trouvera de même que la formule pour déterminer les termes du 7e ordre est $X = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).(n+4).(n+5)}{2.3.4.5.6}$; si $n = 8$, le 8e terme du 7e ordre sera $X = \frac{8.9.10.11.12.13}{2.3.4.5.6} = 1716$.

7°. Par la même raison, on trouvera que la formule pour déterminer les termes du 8e ordre est

$$X = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).(n+4).(n+5).(n+6)}{2.3.4.5.6.7.};$$

que celle des termes du 9e ordre est . . . . .

$$X = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).(n+4).(n+5).(n+6).(n+7)}{2.3.4.5.6.7.8}.$$

On peut, en continuant ces formules, trouver que celle du 12e ordre est . . . .

$$X = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).(n+4).(n+5)\,(n+6)\,(n+\;).(n+8).(n+9).(n+10)}{2.3.4.5.6.7.8.9}$$

On voit par l'expreſſion de X dans chaque ordre, que le dernier terme du numérateur eſt n, plus un nombre qui déſigne le degré de l'ordre moins 2 unités, & que le dernier terme du dénominateur eſt le degré de l'ordre diminué d'une unité.

351. En obſervant la formation de ces formules, on les continuera auſſi loin qu'on voudra, puiſque chacune eſt une fraction, dont le numérateur eſt n multiplié ſucceſſivement par $n+1$, par $n+2$, par $n+3$, par $n+4$ par $n+5$, par . . . . . $(n+m-2)$, & dont le dénominateur eſt 2, multiplié ſucceſſivement par 3, par 4, par 5, par . . . $m-1$.

Ainſi, en général, la formule pour déterminer les termes de l'ordre m, dont n repréſente le quantieme terme, eſt . . . .

$$X = \frac{n(n+1).(n+2).(n+3) \;.\;.\;.\;.\; \times(n+m-2)}{2.\,3.\,4 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \times(m-1)}.$$

Puiſqu'un terme de l'ordre m & du rang n eſt égal à la ſomme des termes de l'ordre $m-1$ juſqu'au rang n incluſivement, & que la formule pour trouver le terme de l'ordre m & du rang n eſt

$$X = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3) \;.\;.\;.\; \times(n+m-2)}{2.\,3.\,4 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \times(m-1)}.$$

la ſomme de tous les termes de l'ordre m, juſqu'au rang n incluſivement, ſera . . . . .

$$s = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).(n+4) \;.\;.\;.\; (n+m-1)}{2.\,3.\,4.\,5 \;,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (m)};$$

de ſorte que la ſomme des 9 premiers termes du 8[e] ordre ſera exprimé par . . . .

$$s = \frac{9.10.11.12.13.14.15.16}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8} = \frac{518918400}{40320} = 12870,$$

ſomme des 9 premiers termes du 8[e] ordre; on trouve dans la table, que cette ſomme 12870

eſt le 9e terme du 9e ordre, & par conſéquent la ſomme des 9 premiers termes du 8e ordre, d'après la formation de ces nombres figurés ou ordinaux. C. Q. F. B. R.

352. PROB. Déterminer le nombre des termes que contient une puiſſance quelconque d'un multinome donné.

Par exemple: quel eſt le nombre des termes contenus dans la quatrieme puiſſance du *ſextinome* $a+b+c+d+f+g$. La table des nombres figurés nous donne la ſolution de ce problême; c'eſt (347) le 6e terme du 5e ordre, ſavoir, 126. Si on vouloit ſavoir combien de termes contient le cube du ſextinome $a+b+c+d$ $f+g$, on trouvera que c'eſt le 6e terme du 4e ordre, ſavoir, 56; auſſi $(a+b+c+d+f+g)^3 = \ldots$ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3+3a^2d+6abd+3b^2d+6acd+6bcd+3c^2d+3ad^2+3bd^2+3cd^2+d^3+3a^2f+6abf+3b^2f+6acf+6bcf+3c^2f+6adf+6bdf+6cdf+3d^2f+3af^2+3bf^2+3cf^2+3df^2+f^3+3a^2g+6abg+3b^2g+6acg+6bcg+3c^2g+6adg+6bdg+6cdg+3d^2g+6afg+6bfg+6cfg+6dfg+3f^2g+3ag^2+3bg^2+3cg^2+3dg^2+3fg^2+g^3$; ainſi des autres; c'eſt-à-dire en général, que le nombre qu'on cherche occupe le rang exprimé par le nombre des termes du multinome, pris dans l'ordre, dont l'expoſant excede d'une unité celui de la puiſſance à laquelle on veut élever le multinome propoſé; ainſi le 8e terme 792 du 6e ordre indique que la 5e puiſſance du multinome de 8 termes a, b, c, d, f, g, h, l contient 792 termes, &c. C. Q. F. Dét.

353. Il ſuit de la formation de la table des nombres figurés qu'un terme d'une ſuite eſt fait du terme qui le précede plus du terme de la ſuite précédente, qui eſt immédiatement au-deſſus de lui; le 8e terme 120 du 4e ordre, eſt fait du terme précédent 84 plus du terme du 3e ordre 36, qui eſt au-deſſus de 120, où ce 8e terme 120 eſt égal à la ſomme des termes de la colonne précédente verticale & correſpondante, c'eſt-à dire, à la ſomme des 7es termes, des 1er, 2e, 3e & 4e ordres, $120 = 1 + 7 + 28 + 84$. On trouve de même que le 9e terme 6435 du 8e ordre eſt fait du terme précédent 3432 & du terme ſupérieur correſpondant 3003 du 7e ordre, ou que ce 9e terme 6435 du 8e ordre égale la ſomme des termes de la colonne précédente verticale & correſpondante $1 + 8 + 36 + 120 + 330 + 792 + 1716 + 3432$. C. Q. F. B. R.

DES NOMBRES POLYGONES.

354. DÉF. On appelle *nombres polygones* les ſommes ſucceſſives des termes de diverſes progreſſions arithmétiques, dont le premier terme $a = 1$, & dont la différence d eſt un nombre quelconque ou l'unité.

Ces nombres ſont ainſi appellés, parce qu'on peut diſpoſer en *polygones réguliers* (1) les unités qu'ils renferment.

(1) On appelle *polygone* en général une figure de pluſieurs côtés; ainſi un *triangle* qui a 3 côtés, & un *quarré* qui en a 4, ſont des polygones; cependant, à proprement parler, on ne donne le nom de *polygone*

La progreſſion arith. ÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ou la ſuite des nombres naturels ou du ſecond ordre, qui a l'unité pour différence, forme par l'addition ſucceſſive de ces termes, la ſuite des nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. ou du 3[e] ordre, on les nomme nombres *triangulaires*, parce qu'on peut les diſpoſer en triangles, comme on voit *planche* 1, *fig.* 7.

355. Si la différence qui regne dans la progreſſion arithmétique eſt $2 = d$, les nombres polygones formés par l'addition ſucceſſive de ſes termes ſont des quarrés, parce qu'on peut les diſpoſer en quarrés.

La progreſſion arithmétique de la ſuite des nombres impairs ÷ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. dont la différence eſt 2, donne la ſuite des nombres *quarrés* 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c. ainſi appellés, parce qu'on peut les diſpoſer en quarrés. Voyez la *planche* 1, *fig.* 8.

356. Si la différence qui regne dans la progreſſion arithmétique eſt $3 = d$, les nombres formés par l'addition ſucceſſive de ſes termes s'appellent *pentagones*, parce qu'on en peut former des pentagones, comme on voit *planche* 1, *fig.* 9.

---

qu'aux figures qui ont plus de quatre côtés: pluſieurs d'elles, indépendamment de cela, prennent un nom particulier, ſuivant le nombre de ſes côtés; celles de 5 côtés s'appellent *pentagone*; celles de 6, *exagone*; celles de 7, *eptagone*; celles de 8, *octogone*; celles de 9, *ennéagone*; celles de 10, *décagone*; celles de 11, *ondécagone*, & enfin celles de 12, *dodécagone*: au-delà elles conſervent le nom commun de *polygone*; ainſi on dit *polygones de* 13 *côtés*, *de* 14 *côtés*, &c.

Les *polygones* ſont dits *réguliers*, quand les côtés ſont égaux, & ſont également inclinés les uns ſur les autres.

Prog. arith. ÷ 1, 4, 7, 10, 13, 16, &c.
Nombre pentag. 1, 5, 12, 22, 35, 51, &c.

357. Si la différence qui regne dans la progreſſion arith. eſt 4 = *d*, les nombres formés par l'addition ſucceſſive des termes de cette progreſſion arithmétique ſont des nombres *exagones*, parce qu'on peut les diſpoſer en exagones. Voyez *pl.* 1, *fig.* 10.

Prog. arith. ÷ 1, 5, 9, 13, 17, 21 &c. dont la différence *d* = 4.
Nom. exag. 1, 6, 15, 28, 45, 66 &c.

358. Si la différence qui regne dans la progreſſion arithmétique eſt 5 = *d*, les nombres formés par l'addition ſucceſſive de ſes termes,
Pl. 1, ſeront des nombres *eptagones*, parce qu'on pourra
fig. 11. les diſpoſer en eptagones ; ainſi des autres.

359. Il ſuit, 1°. de la formation des nombres polygones, que le nombre des angles (1) ou des côtés d'un polygone quelconque excede de 2 unités la différence qui regne dans la progreſſion arithmétique d'où il eſt tiré ; *par exemple*, les nombres triangulaires ſont déduits d'une progreſſion arithmétique, dont la différence *d* = 1 ; les nombres exagones ſont déduits de celle qui a 4 pour différence, &c. ; de ſorte que ſi le nombre des angles, ou des côtés d'un nombre polygone, eſt exprimé par *b*, & la différence de la progreſſion arith. d'où il eſt tiré l'eſt par *d* ; on aura toujours *b* = *d* + 2, ou *d* = *b* — 2.

(1) On appelle *angle* l'ouverture que forment deux lignes qui ſe rencontrent. Dans un polygone régulier, tous les angles que forment les côtés, ſont égaux entr'eux.

2°. Que le nombre des côtés d'un polygone est constant, mais que chaque côté peut être composé de plusieurs unités ; *par exemple*, tout nombre triangulaire est composé de 3 côtés ; mais chaque côté peut être composé de 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. unités. Le nombre exagone est composé de 6 côtés ; mais chacun de ces côtés peut être composé de 2, de 3, de 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c. unités ; ainsi des autres.

3°. Que le nombre des unités contenues dans un côté d'un polygone quelconque, est égal au nombre des termes de la progression arithmétique, dont il fait somme. On voit que le côté du nombre exagone 28, formant l'exagone ABCDEF, est 4, qui exprime dans la progression géométrique, qui forme le nombre exagone, le nombre des termes 1, 5, 9, 13, dont 28 est la somme ; on voit de même que le côté d'un nombre pentagone 12, est 3, qui exprime dans la progression géométrique qui forme les nombres pentagones, le nombre des termes 1, 4, 7, dont 12 est la somme. Ceci entendu, il sera facile de résoudre les problêmes qu'on pourra proposer sur les nombres polygones. Pl. 1, fig. 10. Fig. 9.

360. PROB. Déterminer un nombre polygone quelconque, dont le côté n & le nombre des angles b sont donnés, ou, ce qui est la même chose, trouver la somme d'une progression arithmétique, dont le nombre des termes n est connu, avec la différence $d = b - 2$, & le premier terme $a = 1$.

SOLUTION. On sait (283) que la somme de tous les termes d'une progression arithmétique quelconque est égale au double du premier terme multiplié par le nombre des termes plus

à la différence multipliée par le quarré du nombre des termes moins le nombre des termes multiplié par la différence, le tout divisé par 2, c'est-à-dire, que $s = \frac{2an + dnn - dn}{2}$, & si à la place de a & de d, on substitue leur valeur, on aura $s = \frac{2n + bn^2 - 2n^2 - bn + 2n}{2} = \frac{4n + bn^2 - bn - 2n^2}{2} = 2n + \frac{bn^2 - bn}{2} - n^2$ pour la valeur du nombre polygone demandé, & pour formule générale $s = 2n + \frac{bn^2 - bn}{2} - n^2$.

Cette formule indique qu'un nombre polygone quelconque est égal à 2 fois son côté, plus au produit du nombre des angles par le quarré de ce côté moins ce côté, divisé par 2, ôtant du résultat le quarré de ce côté, de sorte que si le côté d'un nombre exagone est $4 = n$, dans ce cas $b = 6$ & $d = 4$; substituant on aura $s = 2n + \frac{bn^2 - bn}{2} - n^2 = 8 + \frac{6 \times 16 - 6 \times 4}{2} - 16 = 28$; ainsi des autres. C. Q. F. Dét.

361. Si on veut avoir des formules particulieres pour chaque nombre polygone, il faut substituer dans la formule générale $s = 2n + \frac{bn^2 - bn}{2} - n^2$ à la place de b sa valeur, c'est-à-dire, 3 pour le nombre triangulaire, 4 pour le quarré, 5 pour le nombre pentagone, 6 pour l'exagone, 7 pour l'eptagone, &c. on aura les formules particulieres ci-après.

Nombre triangulaire $s = \frac{n^2+n}{2}$,

quarré . . . $s = n^2$

pentagone . . $s = \frac{3n^2-n}{2}$,

exagone . . . $s = \frac{4n^2-2n}{2}$,

eptagone . . $s = \frac{5n^2-3n}{2}$,

octogone . . $s = \frac{6n^2-4n}{2}$,

ennéagone . . $s = \frac{7n^2-5n}{2}$,

décagone . . $s = \frac{8n^2-6n}{2}$,

ondécagone.. $s = \frac{9n^2-7n}{2}$,

dodécagone.. $s = \frac{10n^2-8n}{2}$.

Il est à remarquer que n représente toujours le nombre d'unités du côté de chaque nombre polygone; *par exemple*, si le côté $n = 6$, & que ce soit le nombre pentagone qu'on cherche, on aura $\frac{3n^2-n}{2} = \frac{108-6}{2} = 51$; ce qui est vrai: car la somme de la progression arithmétique de 6 termes, dont la différence est 3, savoir, . . . ÷ 1, 4, 7, 10, 13, 16, est 51; ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

362. PROB. Un nombre polygone étant donné avec celui de ses angles, trouver le côté, ou, ce qui est la même chose, la somme des termes d'une progression arithmétique, étant donnée, avec la différence & le premier terme, trouver le nombre des termes.

SOLUT. Soit le nombre polygone quelconque s, les formules (361) donneront la solution de ce pro-

blême; car si s représente un nombre polygone triangulaire, on aura cette équation $s = \frac{n^2+n}{2}$ dans laquelle s est un nombre donné, & n l'inconnue qu'on cherche. Si on multiplie par 2, on aura $n^2 + n = 2s$; si on ajoute (167) de part & d'autre le quarré de la moitié du coëfficient 1 de n, on aura un quarré parfait $n^2 + n + \frac{1}{4} = 2s + \frac{1}{4} = \frac{8s+1}{4}$; si on tire de part & d'autre la racine quarrée, on aura $n + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{8s+1}{4}}$, d'où $n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{8s+1}{4}}$, formule pour trouver le côté d'un nombre polygone triangulaire quelconque; si $s = 21$, on trouvera que $n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{8s+1}{4}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{169}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{13}{2} = 6$. En effet, 6 est le nombre des termes de la progression arith. des nombres naturels ÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, dont la somme est 21, qui forme le nombre triangulaire, dont le côté est de 6 unités.

2°. La formule pour le côté du nombre polygone quarré sera $n = \sqrt{s}$; car la formule (361) donne $s = n^2$, d'où $n = \sqrt{s}$. Si $s = 49 = n^2$, on aura $n = 7$ unités, côté du nombre polygone quarré $49 = s$, & en même tems nombre des 7 termes de la progression arithmétique des nombres impairs ÷ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, dont la somme est $49 = s$.

3°. De la formule du nombre pentagone $s = \frac{3n^2-n}{2}$ (361), on déduit $3n^2 - n = 2s$, d'où $n^2 - \frac{n}{3} = \frac{2s}{3}$. Si on ajoute de part & d'autre le quarré

de la moitié du coëfficient $\frac{1}{3}$ de n, on aura un quarré parfait $n^2 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{36} = \frac{2s}{3} + \frac{1}{36}$; tirant la racine quarrée, & transposant, on aura $n = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{24s+1}{36}}$, formule pour déterminer le nombre des unités d'un nombre pentagone donné s quelconque. Si $s = 22$, on trouvera que le côté $n = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{24s+1}{36}} = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{529}{36}} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = \frac{24}{6} = 4$. En effet, les 4 premiers termes de la progression arithmétique ÷ 1, 4, 7, 10 donne le nombre pentagone 22, qui a 4 pour côté.

4°. Par un pareil procédé, on trouvera que la formule pour déterminer le nombre des unités du côté du nombre exagone est $n = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{8s+1}{16}}$. Si le nombre exagone $s = 45$, en substituant, on aura $n = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{8 \times 45 + 1}{16}} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{361}{16}} = \frac{1}{4} + \frac{19}{4} = 5$, côté du nombre exagone $s = 45$, somme des 5 premiers termes de la progression arithmétique ÷ 1, 5, 9, 13, 17, dont la différence $= 4$ &c.

5°. La formule pour déterminer le nombre des unités du côté d'un nombre eptagone quelconque est $n = \frac{3}{10} + \sqrt{\frac{40s+9}{100}}$. Si le nombre eptagone $s = 55$, en substituant, on aura $n = \frac{3}{10} + \sqrt{\frac{40 \times 55 + 9}{100}} = \frac{3}{10} + \sqrt{\frac{2209}{100}} = \frac{3}{10} + \frac{47}{10} = 5$, nombre des unités du côté du nombre eptagone $s = 55$, somme de 5 premiers termes de la progression arith. ÷ 1, 6, 11, 16, 21, dont la différence est 5.

6°. La formule pour déterminer le nombre des unités du côté du nombre octogone quelconque, eſt $n = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{3s+1}{9}}$.

7°. La formule pour déterminer le nombre des unités du côté d'un nombre ennéagone quelconque eſt $n = \frac{5}{14} + \sqrt{\frac{56s+1}{196}}$.

8°. La formule pour déterminer le nombre des unités du côté d'un nombre décagone quelconque, eſt $n = \frac{3}{8} + \sqrt{\frac{16s+9}{64}}$.

9°. La formule pour déterminer le nombre des unités du côté d'un nombre ondécagone quelconque, eſt $n = \frac{7}{18} + \sqrt{\frac{72s+49}{324}}$.

10°. La formule pour déterminer le nombre des unités du côté d'un nombre dodécagone eſt $n = \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{5s+4}{25}}$.

En agiſſant de même ſur les formules des nombres polygones de 13, 14, 15, &c. côtés, on pourra continuer ces formules auſſi loin qu'on voudra.

363. Ce ſeroit ici le lieu de parler des ſuites ou des ſéries des nombres en général, & de déterminer les formules pour les ſommer. Contentons-nous d'expoſer les formules pour ſommer, 1° la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.; 2°. celles des nombres triangulaires qu'on en déduit, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45; 3°. celle des quarrés des nombres naturels 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81; 4°. celle des cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343,

343, 512, 729 des termes de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On voit que chaque terme dans la suite des nombres triangulaires, dans celle des quarrés & dans celle des nombres cubes, occupe le rang représenté par le terme correspondant de la suite des nombres naturels; le quarré 81 occupe le 9e rang de sa suite; & il répond au 9e terme 9 de la suite des nombres naturels; de même, le cube 512, qui répond au 8e terme de la suite des nombres naturels, est le 8e terme de sa suite; conséquemment, si on exprime par n le quantieme terme de la suite des nombres triangulaires, de la suite des quarrés, de celle des nombres cubes, cette quantité n représentera le nombre des termes correspondans de la suite des nombres naturels; & (283) $\frac{n^2+n}{2}$ sera la formule pour trouver la somme des nombres naturels, dont n représente le nombre des termes, & en même tems le dernier terme de la suite. Si $n = 9$, on aura $s = \frac{n^2+n}{2} = \frac{81+9}{2} = 45$, valeur des 9 nombres naturels $1+2+3+4+5+6+7+8+9$; ainsi des autres.

364. THÉOR. Dans la suite finie des nombres naturels ÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. la somme des quarrés des termes de cette suite égale le cube du terme qui suivroit le dernier, ou le cube du dernier terme plus 1, moins 3 fois la somme des termes de la suite des nombres naturels, moins le nombre des termes de la suite, moins 1, le tout divisé par 3.

Ou bien la somme des quarrés des termes de la suite des nombres naturels, est le 4e terme

d'une analogie, dont le premier terme est le nombre constant 6 ; le 2e, le double du dernier terme de la suite plus 1 ; le 3e, le quarré du dernier terme plus le dernier terme. Si dans cet exemple, on exprime par s^2 la somme des quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36 des termes de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, & le dernier terme 6 par n, on aura $6 : 2n+1 :: n^2+n : s^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, formule générale, ou ici . . . $6 : 13 :: 42 : s^2 = 91 = 1+4+9+16+25+36$.

DÉM. Soit la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, $6=n$, dernier terme, & qui est aussi le nombre des termes ; soit la somme de leurs quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36 exprimé par s^2, on aura (363) la somme des nombres naturels exprimée par $s = \frac{n^2+n}{2} = 1+2+3+4+ +5+6$; cela posé, des termes de la suite des nombres naturels, on formera ces équations & celles de leurs cubes.

	dont les cubes donnent,
$2=1+1$	$8= 1+3.\ 1+3.1+1$
$3=2+1$	$27= 8+3.\ 4+3.2+1$
$4=3+1$	$64= 27+3.\ 9+3.3+1$
$5=4+1$	$125= 64+3.16+3.4+1$
$6=5+1$	$216=125+3.25+3.5+1$
$7=n+1=6+1$	$(7)^3=(n+1)^3=216+3.36+3.6+1$

Ajoutant ces équations & effaçant les termes qui se détruisent, on aura $(n+1)^3 = (6+1)^3 = 1+3.(1+4+9+16+25+36)+3.(1+2+3+4+5+6)+n$, d'où transposant $3.(1+4+9+16+25+36) = (n+1)^3 - 1 - 3.(1+2+3+4+5+6)$

$-n$, ou substituant, on aura $3.s^2 = (n+1)^3$
$-3.\frac{(n^2+n)}{2} - n - 1$ (1), ou. . . . . . .
$3.s^2 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \frac{3n^2 - 3n}{2} - n - 1 =$
$\frac{2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2}{2}$, corrigeant, on aura $3.s^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$; divisant les 2 membres par 3, on aura $s^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, formule qui indique que la somme des quarrés des termes de la suite des nombres naturels est égale au double du cube du dernier terme, ou du nombre des termes, plus à 3 fois son quarré plus au dernier terme, le tout divisé par 6; & si l'on fait attention que la formule $s^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, donne $6s^2 = 2n^3 + 3n^2 + n = (2n+1).(n^2+n)$, on en déduira cette analogie . . . .
$6 : 2n + 1 :: n^2 + n : s^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, somme des quarrés des termes de la suite des nombres naturels. Dans cet exemple, $n = 6$, on aura $6 : 13 :: 42 : s^2 = 91$; ainsi des autres. C. Q. F. D. & B. R.

365. La formule $s = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ sert à trouver le nombre de boulets contenus dans une pyramide quarrée (2) de boulets, MRNO, dans Pl. 2, fig. 2.

(1) En divisant cette équation par 3, on aura la premiere expression de la somme des quarrés des termes de la suite des nombres naturels, donnée dans l'énoncé de ce théorême.

(2) On appelle *pyramide* un solide qui a pour base une figure plane quelconque, & qui est formée d'autant de triangles montans que la base a de côtés : le

laquelle n repréſente le nombre des boulets contenus dans un des côtés de la baſe de la pyramide; car cette pyramide eſt compoſée de pluſieurs couches ſucceſſives de boulets, dont chacune eſt exprimée par le quarré du côté, & les côtés de ces différentes couches allant toujours en diminuant d'un boulet, donnent la ſuite des nombres naturels. Si $n = NR = 10$, on trouvera le nombre des boulets que contient la pyramide par cette analogie, $6 : 21 :: 110 : s^2 = \frac{110 \times 21}{6} =$ 385 boulets contenus dans la pyramide quarrée, dont chaque côté de la baſe eſt de 10 boulets. C. Q. F. B. R.

366. DÉF. Si on fait l'addition ſucceſſive des nombres naturels ÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. on aura la ſuite des ſommes des progreſſions arith. correſpondantes à chaque terme de la ſuite des nombres naturels, ou la ſuite des nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21 &c. La ſomme de cette ſuite forme une pyramide triangulaire d'unités ou de boulets, dont le dernier terme exprime le nombre des boulets du triangle qui lui ſert de baſe, & le premier terme 1 eſt le ſommet.

367. THÉOR. La ſuite des nombres triangulaires eſt égale au cube du nombre naturel correſpondant au dernier terme de la ſuite triangulaire plus à 3 fois ſon quarré plus à deux fois ce nombre naturel, qui repréſente en même tems le nombre des termes de la ſuite, le tout diviſé par 6.

Ou bien cette ſuite de nombres triangulaires

---

point où ces triangles ſe rencontrent, ſe nomme le *ſommet de la pyramide*; une pyramide s'appelle *triangulaire*, *quarrée*, *exagonale*, &c. ſuivant que ſa baſe eſt un *triangle*, un *quarré*, un *exagone*, &c.

eſt le 4[e] terme d'une analogie, dont le 1[er] terme eſt le nombre conſtant 6; le 2[e], le nombre des termes plus 1, & le 3[e], le quarré du nombre des termes plus 2 fois ce nombre des termes.

DÉM. La ſuite des nombres triangulaires correſpondans aux termes de la ſuite des nombres naturels ÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. eſt (363) la ſuite $\frac{1.1+1}{2}$, $\frac{2.2+2}{2}$, $\frac{3.3+3}{2}$, $\frac{4.4+4}{2}$, $\frac{5.5+5}{2}$, $\frac{6.6+6}{2}$ &c., dont le double eſt la ſuite $1+1$, $4+2$, $9+3$, $16+4$, $25+5$, $36+6$, qui renferme la ſuite des quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, dont la ſomme eſt $s^2 = \frac{2n^3+n^2+3n}{6}$ (364), & la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, qui (363) eſt $s = \frac{n^2+n}{2} = \frac{3n^2+3n}{6}$: donc la ſuite $1+1$, $4+2$, $9+3$, $16+4$, $25+5$, $36+6$, compoſée de ces deux ſuites, eſt $s^2+s = \frac{2n^3+6n^2+4n}{6}$, dont la moitié $\frac{s^2+s}{2} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ eſt la ſuite des nombres triangulaires qui forment la pyramide triangulaire, dont le côté de la baſe eſt n. Si on exprime la ſomme de cette ſuite par z, on en déduira la proportion $6 : n+1 :: n^2+2n : z = \frac{n^3+n^2+2n^2+2n}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$. C. Q. F. D.

Ainſi l'équation $\frac{n^3+3n^2+2n}{6} = z$, ou la proportion $6 : n+1 :: n^2+2n : z$, eſt une formule pour trouver le nombre des boulets contenus dans une pyramide triangulaire I L P K, dont le côté de la baſe L P eſt exprimé par n. Si, *par exemple*, n = L P = 10, on aura la proportion $6 : 11 :: 120 : z = 220$; c'eſt-à-dire, qu'il y a 220 boulets contenus dans la pyramide triangu- Pl. 2. fig. 1.

laire ILPK, dont le côté de la base est de 10 boulets. Ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

368. On appelle *pyramide oblongue* de boulets, un arrangement de boulets, ABHDE, composé d'une pyramide quarrée, AEDC & d'autant de faces triangulaires de boulets qu'il y a de boulets dans l'arrête supérieure AB de la pyramide oblongue moins un.

Pl. 2, fig. 3.

369. THÉOR. 1°. La pyramide quarrée de boulets MRNO est aussi égale au nombre de boulets contenus dans une face triangulaire montante MNR, multipliée par 2 fois le nombre de boulets contenus dans un côté de la base plus un divisé par 3;

Pl. 2, fig. 2.

2°. La pyramide oblongue de boulets ABHDE est égale au nombre de boulets contenus dans une des faces triangulaires EAD = DAC, multiplié par le tiers du nombre de boulets contenus dans les 3 longueurs ou arrêtes AB, DH & l'égale de DH du côté opposé.

Pl. 2, fig. 3.

DÉM. 1°. La formule de la pyramide quarrée de boulets trouvée (364) $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ est faite de $\frac{n^2+n}{2}$, multipliée par $\frac{2n+1}{3}$; mais (363) $\frac{n^2+n}{2}$, exprime le nombre de boulets contenus dans une face triangulaire montante, puisque cette face forme une prog. arith. ÷ 1, 2, 3, 4, 5 .... n, & $\frac{2n+1}{3}$ est deux fois le côté n de la base plus un, divisé par 3. Donc, &c. C. Q. F. 1°. D.

2°. Si on exprime par b le nombre de boulets moins un, contenus dans l'arrête supérieure, les 3 longueurs ou arrêtes de la pyramide totale oblongue seront $2n+1+3b$ (1), dont le tiers

(1) Savoir trois fois la longueur AB = CH moins le

est $\frac{2n+1}{3}+b$, & la face triangulaire montante sera $\frac{n^2+n}{2}$; si on multiplie ces deux quantités, on aura $\frac{3n^3+3n^2+n}{6}+\frac{n^2+n}{2}\times b$, & ce produit contient la pyramide quarrée de boulets plus autant de fois la face triangulaire de boulets qu'il y a de boulets dans l'arrête supérieure moins un; ce qui compose la pyramide oblongue entiere : donc, &c. Si $n=10$ & $b=12$, on aura Pl. 2, fig. 3.
$\left(\frac{2n+1}{3}+b\right).\left(\frac{n^2+n}{2}\right)=\left(\frac{20+1}{3}+12\right).\left(\frac{100+10}{2}\right)$
$=19\times55=1025$ boulets contenus dans une pyramide oblongue de boulets, dont l'arrête supérieure $b+1=13$ boulets, & le côté de la face triangulaire $n=10$ boulets; ainsi des autres. C. Q. F. D. & B. R.

DES QUARRÉS MAGIQUES.

370. DÉFIN. Le quarré magique est un quarré divisé en petits quarrés qu'on appelle *cases* ou *cellules*, & qu'on remplit avec les termes d'une progression arithmétique quelconque, de sorte que la somme de chaque colonne verticale & de chaque colonne horizontale donne chacune une somme égale à celle de chaque diagonale (1).

---

boulet A, plus deux fois CD, qui exprime le nombre 10, des boulets compris dans la base de la face triangulaire, plus le boulet A.

(1) On appelle *diagonale* une ligne droite, telle que AC (*pl.* 1, *fig.* 8), qui est menée d'un des angles A, d'un quarré à l'angle opposé C.

Le quarré magique est pair ou impair. Le quarré 16 est pair, de même que 36, 64, 100 &c.; l'impair est 9, 25, 49, 81 &c. Le plus petit quarré pair, où l'on puisse *magiquement* disposer les termes d'une progression arithmétique est 16; le plus petit des quarrés impairs est 9: les quarrés impairs ont leur loi particuliere pour l'arrangement des termes; les quarrés pairs en ont une autre.

Des quarrés magiques impairs.

371. PROB. Disposer magiquement les neuf termes de cette progression arithmétique ..., ÷3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19; ou, en former un quarré magique.

SOLUTION. *Regle générale*. 1°. Le terme moyen, ou ici le 5e qui est 11, doit occuper la case du milieu, ou le *centre* du quarré.

2°. On dispose sous les 4 premiers termes 3, 5, 7, 9, les 4 derniers, comme on voit 19, 17, 15, 13, de sorte qu'un terme du premier rang avec son correspondant du second fasse la même somme, ici 22; on voit que $3 + 19 = 5 + 17 = 7 + 15 = 9 + 13 = 22$. Cela posé;

3°. Le terme 9, qui précede celui du milieu 11, se place dans la diagonale A B, à gauche de la case du milieu 11; le terme 13 qui suit celui du milieu 11, se met dans la diagonale A B, à droite de 11.

4°. Les termes correspondans 7 & 15 se placent, savoir, le plus petit 7 dans le rang horisontal à gauche de la case du milieu 11, son correspondant 15 à droite du terme du milieu 11, dans le même rang horisontal.

A — C

9	19	5
7	11	15
17	3	13

D — B

5°. Les deux termes correſpondans 5 & 17 ſe placent, ſavoir, le plus petit 5 dans l'autre diagonale CD du quarré à droite du terme du milieu 11; le grand, 17, dans la même diagonale C D, à gauche au-deſſous du terme du milieu 11.

6°. Les deux termes correſpondans 3 & 19 ſe placent dans la colonne verticale qui répond à la caſe du milieu, ſavoir le plus petit terme 3 au-deſſous du terme du milieu 11, & ſon correſpondant 19 dans la même colonne verticale au-deſſus du terme du milieu 11.

Il eſt clair, d'après cette formation, que le quarré magique de neuf termes eſt achevé; car les deux diagonales, ainſi que le rang horizontal & le rang vertical qui paſſent par le milieu du quarré, ſont compoſés tous du terme du milieu de la progreſſion 11, plus de deux termes 9 & 13, ou 17 & 5, ou 19 & 3, ou 7 & 15, qui étant également éloignés du terme du milieu, donnent une ſomme égale. Quant aux quatre rangs 9, 19 & 5; 5, 15 & 13; 13, 3 & 17; 17, 7 & 9, on voit qu'ils ſont compoſés d'abord d'un des termes de la diagonale, plus d'un terme qui renferme autant de fois la différence de plus ou de moins que le terme du milieu 11; que le 3.ᵉ terme du rang horiſontal la renferme de moins ou de plus que le 3.ᵉ terme de la diagonale; ainſi, *par exemple*, après 9 il y a 19, qui ſurpaſſe 11 de 4 fois la différence, & pour 3.ᵉ terme 5, qui eſt

au-dessous de 13 de 4 fois la différence. On a donc chaque rang & chaque diagonale = 22 + 11 = 33. C.Q.F. Dét.

372. PROB. Former le quarré magique impair 25 avec les termes de la progression arith. suivante, ou la suite des nombres naturels jusqu'à 25.

SOLUT. Ayant disposé les 25 termes comme on voit,

÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. 13
25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14.

A — C

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

D — B

1°. Je place le terme moyen 13 dans la case du milieu; & comme dans chaque diagonale il y a 5 cases, je place dans la diagonale AB les termes correspondans qui précedent & qui suivent celui du milieu 13, savoir, 12 à gauche de 13, son correspondant 14 au-dessous à droite, le terme 11 dans la premiere case à gauche A & son correspondant 15 dans la case opposée B: les cases de la diagonale A B étant remplies; je passe, 2°. au premier terme 1, que je place sous la case du milieu, & son correspondant 25 dans la case au-dessus de celle du milieu 13 dans la colonne verticale.

3°. Je place le second terme 2 & son correspondant 24, savoir, 2 dans la case à droite de 1 dans le rang inférieur, & 24 dans la case à gauche de 25 dans le rang au-dessus, de sorte que 2 & 24 sont placés dans des cases semblablement siuées par rapport à la case du milieu 13.

4°. Je place le terme 3 & son correspondant 23 dans les angles C & D du quarré (parce qu'il n'y a pas de rang au-dessous de celui où est placé 2; s'il y en avoit, il seroit placé dans la case à droite de celle où est 2 dans le rang au-dessous); comme il n'y en a pas, je place 3 dans l'angle C du quarré à droite du terme du milieu 13, & son correspondant 23 dans l'angle opposé D du quarré.

5°. Je place le 4e terme 4 dans la seconde case sous la premiere où est 11 (je l'aurois placé à droite du 3 dans le rang au-dessous, s'il y avoit une colonne); je place son correspondant 22 dans la case alterne au-dessus de B, de sorte que ces nombres 4 & 22 sont semblablement situés par rapport à la case du milieu 13.

6°. Je place le 5e terme 5 à droite du terme 4 dans le rang au-dessous, & son correspondant 21 dans la case alterne, dans le rang horisontal à droite du terme du milieu 13.

7°. Je place le 6e terme 6 dans la colonne verticale où est 5, en sautant une case (parce que la case à droite dans le rang au-dessous de 5 est occupée par le terme 1); son terme correspondant 20 se place dans la case alterne semblable du rang supérieur à droite de la case du milieu 13.

8°. Le 7e terme 7 se placeroit au-dessous du 6e terme & à droite, s'il y avoit un rang au-dessous de celui où est placé le 6e terme 6;

comme il n'y en a pas, il faut placer le terme 7 dans la colonne à droite de celle où est 6 & au-dessus ou au rang supérieur du quarré, & son terme correspondant 19 dans la même colonne verticale au rang inférieur horisontal, pour que ces termes 7 & 19 soient semblablement placés.

9°. Le terme 8 se place au-dessous de 7 dans la case à droite, & son terme correspondant 18 dans la pareille case au-dessous du terme du milieu 13 & à sa gauche, de sorte que les deux diagonales A B, C D sont remplies.

10°. Je place le 9ᵉ terme 9 à la droite du terme 8 dans le rang au-dessous; & comme cette case répond à celle du milieu 13, je place son terme correspondant 17 dans la même colonne horisontale à égale distance de celle du milieu 13.

11°. Comme il n'y a point de case dans le rang au-dessous de 9 à la droite, je place le terme 10 sous 17, terme correspondant de 9, & le terme 16, correspondant de 10, au-dessus de 9. Le quarré magique impair 25 est achevé, dans lequel les colonnes verticales, les horisontales & les diagonales A B, C D donnent chacune 65. C. Q. F. Dér.

373. PROB. Construire le quarré magique impair 49, ou y disposer les 49 termes de la progression arithmétique suivante des nombres naturels.

÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, }
49, 48, 47, 46, 45, 44, 43, 42, 41, 40, 39, 38, }

. . . .

{ 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. terme
{ 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26. 25 moyen.

A C

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

D B

SOLUTION. 1°. On place le terme moyen 25 au centre du quarré.

2°. Les termes 24, 23, 22 dans la diagonale AB du côté de A, & leurs correſpondans 26, 27, 28 dans la même diagonale vers B.

3°. Le premier terme 1 ſe place ſous celui du milieu 25, & ſon terme correſpondant 49 au-deſſus de 25 dans la colonne verticale.

4°. Je place le 2e terme 2 au-deſſous de 1, une caſe à droite, & ſon correſpondant 48 au-deſſus de 49, une caſe à gauche.

5°. Le 3e terme 3 ſe place au-deſſous de 2 dans la caſe à droite, & ſon correſpondant 47 au-deſſus de 48 dans la caſe à gauche.

6°. Le 4e terme 4 ſe placeroit au-deſſous de 3 & à ſa droite, s'il y avoit une caſe ou un rang horiſontal au-deſſous; mais comme il n'y en a pas, le 4 ſe place à la caſe du rang ſupérieur AC, qui répond à la colonne à droite de celle où eſt

la case du 3e terme 3, c'est-à-dire, dans la premiere case de la colonne verticale, qui est à droite de celle où est le terme 3. Comme ce terme 4 se trouve dans la case de l'angle C de la diagonale CD, son terme correspondant 46 doit être placé dans la même diagonale dans la case de l'angle D.

7°. Pour placer les termes 5 & 45, j'observe que 5 se placeroit au-dessous de 4, une case à droite, s'il y en avoit une; comme il n'y en a pas, il faut placer le terme 5 dans la premiere case à gauche de ce second rang horisontal, & son correspondant 45 dans la derniere case à droite du rang horisontal, qui est autant au-dessous du rang du milieu horisontal où est placé le terme moyen 25, que le rang où est le terme 5 est au-dessus du rang du milieu.

8°. Je place le 6e terme 6 dans la case au-dessous de 5 & à droite, & son correspondant 44 dans une case pareille, autant au-dessous du terme du milieu 25 & à droite, que 6 est au-dessus.

9°. Je place le 7e terme 7 au-dessous de 6 dans la case à droite; comme ce terme 7 se trouve dans le rang horisontal où est le terme du milieu 25, & à côté je place son correspondant 43 dans le même rang horisontal à droite du terme du milieu 25.

10°. Je placerois le 8e terme 8 dans la case à droite & au-dessous de celle où est le terme 7; mais comme cette case est remplie par le premier terme 1, je dois placer ce 8 dans la case au-dessous & à gauche de celle où est 1; son terme correspondant 42 se place dans une case pareille, autant au-dessus du terme du milieu 25 & à droite, que 8 est au-dessous & à gauche.

11°. Je place le terme 9 au-dessous de 8 à droite; comme il est dans la même colonne ver-

ticale que le terme du milieu 25, son terme correspondant 41 se met dans la même colonne, autant au-dessus de 25, que 9 est au-dessous.

12°. Je placerois le 10e terme 10 dans le rang au-dessous de celui où est 9 & à sa droite, mais comme il n'y a point de case, je place 10 dans la case supérieure de cette colonne verticale à droite de celle où est 9, & son terme correspondant 40 dans le rang inférieur BD, autant à gauche du terme du milieu 25, que 10 en est éloigné à droite.

13°. Je place le 11e terme 11 à droite de 10, un rang au-dessous, & son terme correspondant 39 dans une case semblablement située, autant au-dessous du terme du milieu 25 & à gauche, que 11 est à droite & au-dessus.

14°. Je place 12 à droite de 11, un rang au-dessous, & son terme corresp. 38 dans une pareille case, autant au-dessous du terme du milieu 25 & à gauche, que 12 est au-dessus & à droite.

15°. Je placerois le terme 13 à droite de 12, une case au-dessous; comme il n'y en a pas, je place 13 dans le rang horisontal au-dessous de celui où est 12, à l'extrêmité à gauche. Cette case étant dans le rang horisontal où est le terme du milieu 25, je place son correspondant 37 dans le même rang horisontal, autant éloigné du terme du milieu 25 à droite, que 13 l'est à gauche.

16°. Je place le 14e terme à droite de 13 dans le rang au-dessous, & son correspondant 36 autant au-dessus du terme du milieu 25 & à droite, que 14 est au-dessous & à gauche.

17°. Je placerois le terme 15 à droite de 14, dans le rang au-dessous; mais comme le terme 8 y est déjà, je place le terme 15 à gauche de 8, un rang au-dessous; son correspondant 35 se

place dans une case pareille, autant au-dessus du terme du milieu & à droite, que 15 est au-dessous & à gauche.

18°. Je placerois le terme 16 à droite de 15, un rang au-dessous; comme il n'y a pas de case, je place 16 dans la case supérieure de la colonne verticale à droite de celle où est 15. Son terme correspondant 34 se place dans une case du rang inférieur DB semblablement située, autant à droite de celle du milieu 25, que 16 est à gauche.

19°. Je place les termes 17, 18, 19, 20 à droite de 16, & leurs correspondans 33, 32, 31, 30 à gauche de 34, dans les cases semblablement situées, & autant éloignées de 25 à gauche, que les autres le sont à droite.

20°. Enfin, je placerois le terme 21 à la droite de 20, un rang au-dessous; comme il n'y a pas de case, je place 21 dans le rang au-dessous de celui où est 20 & à l'extrêmité à gauche, & son correspondant 29 dans une case semblablement située, à droite du terme du milieu 25, & autant au-dessus que le terme 21 est au-dessous & à gauche de ce terme du milieu 25. Le quarré magique est achevé: les colonnes verticales, les horisontales & les diagonales donnent chacune 175. C. Q. F. Dét.

Le détail dans lequel on vient d'entrer ne laisse aucune difficulté pour construire tous les quarrés magiques impairs; on va cependant construire le quarré magique impair 81 avec la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c.; mais on se dispensera d'entrer dans un grand détail pour caser les termes.

L'inspection de la figure & la disposition des termes suffiront pour former tel quarré magique qu'on

qu'on voudra, & y caser les termes d'une progression arithmétique, quelle que soit la différence qui y regne.

374. PROB. Construire le quarré magique impair 81, avec la suite des nombres naturels, ou les termes de la progression arithmétique suivante.

÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
81, 80, 79, 78, 77, 76, 75, 74, 73, 72,

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
71, 70, 69, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62,

21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30,
61, 60, 59, 58, 57, 56, 55, 54, 53, 52,

31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40
51, 50, 49, 48, 47, 46, 45, 44, 43, 42. 41 terme moyen.

A — C

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

D — B

SOLUTION. Ayant diſpoſé les 81 termes comme on voit ci-deſſus, & mis le terme moyen 41 dans la caſe du milieu *m*, je place 1°. les termes 40, 39, 38, 37, dans la diagonale A B, allant du milieu *m* vers l'angle A, & leurs correſpondans 42, 43, 44, 45 au-deſſous de la caſe du milieu *m*, dans la diagonale A B vers B.

2°. Je paſſe de-là au premier terme 1 que je place au-deſſous de la caſe du milieu *m*, & ſon correſpondant 81 au-deſſus de *m*, dans la même colonne verticale.

3°. Je place le ſecond terme 2 à droite du terme 1 dans la caſe au-deſſous, & ſon terme correſpondant 80 à gauche de 81, une caſe au-deſſus; les autres termes ſe placeront facilement, en obſervant ce qu'on a preſcrit, en formant les quarrés magiques 25 & 49, &c.; les colonnes horiſontales, les verticales & les diagonales, donnent chacune 369. C.Q.F. Dét.

Des quarrés magiques pairs.

375. PROB. Conſtruire le quarré magique 16 avec les termes de la progreſſion arithmétique ſuivante.

÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, } moitié des termes.
16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, } leurs correſpon.

A	1ere	2^{e}	3^{e}	4^{e}	C
	1	14	15	4	
5^{e}	8	11	10	5	8^{e}
9^{e}	12	7	6	9	12^{e}
1^{e}	13	2	3	16	16^{e}
D		14^{e}	15^{e}		B

SOLUTION. Je dispose les 8 derniers termes sous les 8 premiers, de sorte que les termes correspondans fassent la même somme, ici 17; on voit que $1+16=2+15=3+14=4+13=5+12=6+11=7+10=8+9=17$; cela fait, je place 1°. le premier terme 1 dans la premiere case A du quarré ACBD, & son correspondant 16 dans l'angle opposé B qui est la 16e case.

2°. Je place le second terme 2 dans la 2e case du rang inférieur DB (c'est la 14e case du quarré) & son correspondant 15 dans la case alterne du rang supérieur horisontal AC.

3°. Je place le 3e terme 3 dans la 3e case du rang inférieur, & son correspondant 14 dans la case alterne à gauche du rang supérieur AC.

4°. Comme la 4e case inférieure est remplie par le terme 16; je place le 4 au haut de cette colonne verticale dans l'angle C, son correspondant 13 dans l'angle opposé D.

5°. Je place le terme 5 sous le 4, & son terme correspondant 12 dans la case alterne à gauche de la colonne verticale DA, qui est la 9e du quarré.

6°. Je place le 6e terme à gauche de 5, dans le rang au-dessous, & son terme alterne 11 dans le rang au-dessus, une case à gauche qui est la 6e case du quarré.

7°. Je place le terme 7 à gauche de 6 dans le même rang horisontal, & son terme correspondant 10 au-dessus de 7, une case à droite.

8°. Enfin, je place le 8e terme 8 à gauche du terme 7 dans le rang au-dessus, & son terme correspondant 9, dans une case pareillement située, savoir, dans la 12e case, qui est la seconde case de la colonne verticale B C, allant de l'angle B vers C. Le quarré magique pair 16 est achevé. On trouve 34 dans chaque rang horisontal & vertical, de même que dans chaque diagonale (1). C. Q. F. Dét.

376. PROB. Former le quarré magique pair 36 avec les termes de la progression arithmétique suivante.

÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,
36, 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19.

---

(1) Cette formation porte avec elle sa démonstration, d'après la nature de la progression arith. On voit clairement aussi, que dans les quarrés magiques impairs 9, 25, 49, &c., la somme des colonnes doit égaler 1 fois $\frac{1}{2}$, 2 fois $\frac{1}{2}$, 3 fois $\frac{1}{2}$, &c. la somme des extrêmes, & que dans les quarrés magiques pairs 16, 36, &c., la somme des colonnes doit égaler 2 fois, 3 fois, &c. la somme des extrêmes.

V K

A C

1 E	35	34	30	5	F 6
33	11	24	25	14	4
8	18	21	20	15	29
28	22	17	16	19	9
10 H	23	12	13	26	G 27
31	2	3	7	32	36

D B

R L

SOLUTION. Pour former les quarrés magiques pairs au-dessus de 16, il faut 1°. inscrire dans le quarré proposé le quarré concentrique (1) 16, EFGH, qu'il faut remplir des 16 termes moyens de la progression arithmétique donnée, ici avec les termes,

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,
26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, } Comme on voit dans la figure. Cela fait,

(1) On appelle figures *concentriques* celles qui ont le même *centre*. Le *centre* est dans un cercle le point qui est également éloigné des points de la circonférence : dans les polygones réguliers, le *centre* est le point également éloigné des angles saillans ; dans un quarré, il seroit déterminé par la rencontre des deux diagonales.

2°. Je place le premier terme 1, dans la premiere case A, & son correspondant 36 dans la case de l'angle opposé B.

3°. Je place le 6e terme 6 dans la case de l'angle C, & son terme correspondant 31 dans la case de l'angle opposé D.

4°. Je place dans la seconde & 3e case du rang inférieur DB les termes 2 & 3, & leurs correspondans 35 & 34 dans les cases pareilles du rang supérieur A C.

5°. Je place le 4e terme 4 sous le 6 dans la même colonne verticale CB, & son terme correspondant 33 à la premiere case à gauche du même rang horisontal.

6°. Je place le 5e terme 5 dans le rang supérieur AC immédiatement à gauche du terme 6, & son corrospondant 32 au bas de la même colonne verticale.

7°. Je place le 7e terme 7 dans la 4e case de rang inférieur DB, & son correspondant 30 dans la case supérieure de la même colonne.

8°. Je place le 8e terme 8 dans la 3e case de la premiere colonne AD, & son terme correspondant 29 dans la premiere case à droite du même rang horisontal.

9°. Je place le 9e terme 9 dans la 4e case de la colonne verticale CB, & son correspondant 28 dans la premiere case à gauche du même rang horisontal.

10°. Enfin je place le 10e terme 10 dans la 5e case de la premiere colonne AD, & son correspondant 27 dans la case opposée de la colonne CB à droite. Le quarré magique pair de 36 termes est formé; on trouve 111 dans chaque rang horisontal & vertical, de même

que dans chaque diagonale (1). C. Q. F. Dét.

377. Si on vouloit former le quarré magique pair 64 avec 64 termes d'une progreſſion arithmétique quelconque, il faudroit, comme on vient de le pratiquer, former le quarré de 36 avec les 36 termes moyens, & remplir les caſes environnantes avec les 28 termes reſtans, ſavoir, les 14 premiers & les 14 derniers qui leur correſpondent, & cela en obſervant la même regle que ci-deſſus. Comme les quarrés magiques ſont de pures ſpéculations d'amuſement, nous n'en dirons pas davantage ; nous ferons remarquer ſeulement, pour l'arrangement des caſes environnantes le quarré 36, 1°. qu'après avoir placé le 1er, le 6e, le 31e & le 36e termes dans les 4 angles, comme on l'a indiqué, on placera les termes 2, 3, 5 7, & leurs correſpondans 35, 34, 32, 30, tant dans les caſes ſupérieures V K, que dans les inférieures R L, les combinant de façon que 3 grands ſoient dans le rang ſupérieur V K, & un grand dans le rang inférieur R L, parce qu'il y a déjà deux grands termes dans les angles inférieurs D & C ; les combinant, dis-je, de maniere que les 4 termes intermédiaires, avec les deux des angles, faſſent la ſomme d'une des diagonales A B ou C D. On trouve, avec un peu d'attention, que les trois petits du rang inférieur ſont le 2e, le 3e & le 7e, & le petit du rang ſupérieur le 5e ; leurs correſpondans occupent

(1) Il eſt clair que les colonnes du quarré 36 ainſi arrangées, doivent donner les mêmes ſommes, puiſqu'on n'a fait qu'ajouter à chacune de celles du quarré magique de 16, la même ſomme, ſavoir, celle des extrêmes, ou celle de deux termes à égale diſtance des extrêmes.

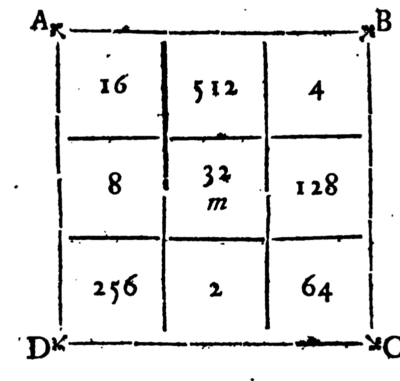
les cases opposées des mêmes colonnes verticales.

Quant aux cases latérales montantes, il faut deux grands termes & deux petits de chaque côté; les petits termes sont le 4e, le 8e, le 9e & le 10e; savoir, le 4e & le 9e à droite, dans la colonne CB, le 8e & le 10e dans la colonne à gauche AD, & leurs correspondans 33, 28, 29, 27 occupent les cases opposées. Ceci peut servir à faciliter la formation des quarrés magiques pairs au-dessus de 36. C. Q. F. B. R.

378. On peut aussi construire des polygones magiques réguliers comme des quarrés; nous en abandonnons la spéculation à nos Lecteurs curieux de ces sortes d'amusemens; nous nous contenterons de disposer, dans un triangle équi-
Pl. 2, latéral ABC, divisé en 9 triangles égaux, les
fig. 4. neuf termes de la progression arithmétique suivante, ÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de sorte que les 3 cases par où passent les perpendiculaires menées des angles sur les côtés opposés, donnent les mêmes résultats; pour cet effet, je place, 1°. les termes 1, 5, 9 dans les 3 cases que traverse la perpendiculaire AD; 2°. les termes 2, 6, 7 dans les cases de BR; 3°. les termes 3, 4, 8 dans les cases que CH coupe. Les nombres contenus dans les cases que ces perpendiculaires traversent, donnent les mêmes résultats, savoir 15, & toutes les cases ensemble 45. C. Q. F. B. R.

378A. Prob. Disposer les 9 termes de la progression géométrique croissante ∺ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 dans les cases du quarré impair 9, de sorte que le produit des termes de chaque rang horisontal, & de chaque

rang vertical, soit le même que celui de chaque diagonale.



SOLUT. Je place, 1°. le terme moyen 32 dans la case du milieu *m*, le terme 16, qui le précede, dans la case de l'angle A, & son terme correspondant 64, qui suit le terme du milieu dans la case opposée C de la diagonale A C.

2°. Je place le premier terme 2 sous le terme du milieu 32, & son correspondant 512 au-dessus.

Je placerois le second terme 4 dans une case au-dessous & à droite de 2; comme il n'y en a pas, je le place dans l'angle B, & son correspondant 256 dans l'autre case D de la diagonale BD; je place le terme 8 dans la case du milieu du rang vertical AD, & son terme correspondant 128 dans la case du milieu du rang vertical BC. Le quarré est rempli: on trouve que le produit des termes de chaque rang & de chaque diagonale est 32768. En effet, les produits que donnent chaque rang & chaque diagonale, ne sont que le produit des extrêmes ou de deux termes également éloignés des extrêmes, par le terme moyen 32. Ils doivent donc être tous égaux. C.Q.F.Dét.

*

DU CALCUL DES EXPOSANS.

379. DÉF. LE calcul des expoſans eſt la maniere de multiplier une puiſſance d'une grandeur ou d'un nombre, par une autre puiſſance de cette grandeur ou de ce nombre; de diviſer l'une par l'autre, de l'élever à une puiſſance, & d'en extraire la racine quelconque.

Soit la ſuite $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9$ &c. de la grandeur a, qui repréſente un nombre quelconque.

On voit, 1°. que $a^3 \times a^4 = a^7$; que $a^2 \times a^3 = a^5$; car $a^2 = aa$, $a^3 = aaa$, & $aa \times aaa = aaaaa = a^5$ (95); c'eſt-dire, que pour multiplier une puiſſance d'une grandeur par une autre puiſſance de cette grandeur, il n'y a qu'à ajouter leurs expoſans: ſi $a = 10$, on aura $a^2 \times a^3 = (10)^2 \times (10)^3 = a^5 = (10)^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$, cinquieme puiſſance du nombre 10.

2°. Que pour diviſer une puiſſance d'une grandeur par une autre puiſſance de la même grandeur, il n'y a qu'à ôter l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende; le reſte eſt l'expoſant du quotient. La raiſon en eſt que, dans toute diviſion, le diviſeur multiplié par le quotient doit redonner le dividende; or pour multiplier les puiſſances du diviſeur par celles du quotient, il faut ajouter leurs expoſans; donc pour faire que cette ſomme ſoit égale à l'expoſant du dividende, il faut en ôter celui du diviſeur pour avoir celui du quotient.

3°. Pour élever une puiſſance de a à une

puissance donnée, il faut multiplier l'exposant de la puissance par l'exposant du degré où l'on veut l'élever; le produit est l'exposant de la puissance cherchée. a^2 élevé au cube est a^6; car $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2$ qui, d'après la regle de la multiplication, donnent a^6; ainsi, en général, a^n élevé à la puissance m, est a^{nm}; a^n élevé à la puissance $\frac{p}{r}$ est $a^{\frac{np}{r}}$; de même a^3 élevé à la puissance $\frac{2}{5}$ est $a^{\frac{6}{5}}$ &c.

4°. Que pour tirer la racine quelconque de la puissance d'une grandeur, il faut diviser l'exposant de la grandeur par l'exposant de la racine qu'on veut extraire; le quotient est l'exposant de la racine qu'on cherche. La raison en est qu'il faudra multiplier cet exposant par celui de la racine qu'on veut extraire pour retrouver l'exposant de la grandeur; ainsi la racine cube de a^6 est $a^{\frac{6}{3}} = a^2$, parce que a^2, élevé au cube, égale $a^{2 \times 3} = a^6$: donc en général la racine m de a^n est $a^{\frac{n}{m}}$; la racine $\frac{q}{p}$ de a^n est $a^{\frac{np}{q}}$; car $n * \frac{q}{p} = \frac{np}{q}$, comme on a vu dans les fractions; de même la racine $\frac{3}{2}$ de a^6 est $a^{\frac{12}{3}} = a^4$; car $6 * \frac{3}{2} = \frac{12}{3} = 4$. Quand on voit cette expression $a^{\frac{5}{3}}$, cela indique qu'on doit tirer la racine cube ou 3e de a élevé à la 5e puiss. Si $a = 10$, $a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{100000}$; ce qui précede rend facile l'intelligence des théorêmes suivans.

380. THÉOR. 1°. Toute grandeur qui a zéro pour exposant égale l'unité, $a^0 = 1$; 2°. lorsqu'on divise la puissance d'une grandeur par une autre puissance de la même grandeur, dont l'exposant

eſt plus grand que celui du dividende, le quotient eſt une puiſſance négative de cette grandeur, dont l'expoſant négatif eſt la différence des deux expoſans ; & cette puiſſance négative devient poſitive en paſſant au dénominateur d'une fraction qui a l'unité ou ſon coëfficient pour numérateur.

1°. *A dém.* que $a^0 = 1$. Si on diviſe a^1 par a^1, le quotient ſera $a^{1-1} = a^0$; mais $a^1 * a^1 = \frac{a^1}{a^1} = 1$; donc $a^0 = 1$. C. Q. F. 1°. D.

2°. *A dém.* que $a^2 * a^5 = a^{-3}$. Cela eſt vrai (379, *art.* 2), puiſqu'il faut ôter l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende pour avoir l'expoſant du quotient. On a donc $a^2 * a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$; car $2 - 5 = -3$; de même on aura $a^0 * a^1 = a^{0-1} = a^{-1}$; $a^0 * a^2 = a^{0-2} = a^{-2}$; mais $a^0 * a^2 = \frac{a^0}{a^2} = \frac{1}{a^2}$; donc $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, c'eſt-à-dire, que toute puiſſance négative devient poſitive, en faiſant paſſer la grandeur avec ſon expoſant devenu poſitif, au dénominateur d'une fraction qui a pour numérateur l'unité ou le coëfficient de la grandeur. *Par exemple*, $5a^{-3} = 5 \times a^{-3}$; mais $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; donc $5a^{-3} = \frac{5}{a^3}$; de même $b\,a^{-m} = \frac{b}{a^m}$ & $\frac{q}{p}a^{-m} = \frac{q}{pa^m}$; on voit donc que les puiſſances négatives ne ſont autre choſe que des fractions qui ont l'unité ou leur coëfficient pour numérateur, & pour dénominateur les puiſſances devenues poſitives. C. Q. F. 2°. D.

381. THÉOR. Toute puiſſance poſitive d'une grandeur devient négative en paſſant au dénomi-

nateur d'une fraction qui a l'unité pour numérateur ou son coëfficient.

A dém. que $a^3 = \frac{1}{a^{-3}}$; que $6a^5 = \frac{6}{a^{-5}}$; que $ba^m = \frac{b}{a^{-m}}$.

1°. On a, par le calcul des exposans, $a^0 * a^{-3} = a^3$, &, par le calcul ordinaire, $a^0 * a^{-3} = \frac{1}{a^{-3}}$; donc $a^3 = \frac{1}{a^{-3}}$; par la même raison $a^5 = \frac{1}{a^{-5}}$; donc $6a^5 = \frac{6}{a^{-5}}$; donc aussi $ba^m = \frac{b}{a^{-m}}$. Donc, &c. C. Q. F. D.

382. Il suit des deux théorêmes précédens qu'on peut faire passer un des produisans du dénominateur d'une fraction au numérateur, ou un des produisans du numérateur au dénominateur, en changeant le signe de son exposant. Si on a $\frac{a^3b^2c^5}{m^{-2}n}$, on aura $\frac{m^2b^2n^{-1}}{a^{-3}c^{-5}}$; de même $\frac{a^3b^{-2}}{cd^{-1}} = \frac{a^3d}{cb^2}$; ce qui est évident, car $\frac{1}{d^{-1}} = d$, & $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$; donc $b^{-2} \times \frac{1}{d^{-1}} = d \times \frac{1}{b^2}$, ou $\frac{b^{-2}}{d^{-1}} = \frac{d}{b^2}$, & multipliant de part & d'autre par $\frac{a^3}{c}$, on aura $\frac{a^3b^{-2}}{cd^{-1}} = \frac{a^3d}{cb^2}$. C. Q. F. D. & B. R.

383. THÉOR. Si l'on fait la suite des puissances positives & négatives d'une grandeur a comme . . . .

$$a^{-\infty} \ldots, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 \ldots a^{\infty}$$

ou son égale $\frac{1}{a^{\infty}} \ldots, \frac{1}{a^1}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 \ldots a^{\infty}$

On reconnoîtra, 1°. que toutes ces puissances forment une progression géométrique, dans

laquelle a^0 ou l'unité tient le milieu entre les puissances positives & les négatives.

2°. Que les exposans forment une progression arithmétique positive & négative, dont zéro est le terme moyen entre les nombres naturels positifs & les négatifs. En effet on a

$$a^0 : a^1 :: a^1 : a^2 :: a^2 : a^3 :: a^3 : a^4, \ \&c.;$$

car $\frac{a^0}{a^1} = \frac{a^1}{a^2} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{a^3}{a^4} = \frac{a^4}{a^5} = \frac{1}{a^1}$.

& $a^0 : a^{-1} :: a^{-1} : a^{-2} :: a^{-2} : a^{-3} :: a^{-3} : a^{-4} :: a^{-4} : a^{-5}$ &c; car $\frac{a^{-4}}{a^{-3}} = \frac{a^{-3}}{a^{-2}} = \frac{a^{-2}}{a^{-1}} = \frac{a^{-1}}{a^{-0}} = a^{-1} = \frac{1}{a^1}$ (380); ainsi ces rapports successifs ayant le même exposant $\frac{1}{a^1}$, les termes forment une progression géométrique. On voit que les puissances positives forment une progression géométrique croissante, dont le premier terme est l'unité ∺ $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 \ldots a^\infty$ & les exposans forment la progression arith. des nombres naturels ÷ 0, 1, 2, 3, 4, 5 . . . &c. positifs. On voit de même que les puissances négatives forment une progression géométrique décroissante, dont l'unité est le premier terme, ∺ $a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} \ldots a^{-\infty}$, & leurs exposans forment la progression arithmétique des nombres naturels négatifs ÷ 0, −1, −2, −3, −4, −5 ... &c. qui commence par zéro. On voit aussi que chaque terme est moyen proportionnel arithmét. entre le terme qui le suit, & celui qui le précede; car on a 0 : −1 : : −1 : −2. C. Q. F. 1°. & 2°. D.

384. Il est bon de faire observer à nos Lecteurs Géometres que ce que nous venons de dire du calcul des exposans sur les grandeurs simples,

doit s'entendre des grandeurs complexes; que $\overline{a+b}^1$, élevé au cube, eſt $(a+b)^3$, que $\overline{a+b}^m \times \overline{a+b}^n = (a+b)^{m+n}$; que $(a+b-c)^p$, élevé à la puiſſance $q = (a+b-c)^{pq}$, & que la racine q de $(a+b)^m$ eſt $(a+b)^{\frac{m}{q}}$, qu'enfin $(a+b)^3 \times (a+b)^5 = (a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2}$ &c. & que l'avantage du calcul des puiſſances eſt que l'on fait par l'addition & par la ſouſtraction ſur les expoſans, ce que l'on fait par la multiplication & la diviſion ſur les nombres ordinaires; que l'on fait par la multiplication & par la diviſion ſur les expoſans, ce qu'on eſt obligé de faire par l'élévation des puiſſances & l'extraction des racines dans le calcul ordinaire.

DE L'ARITHMÉTIQE
DES INFINIS.

385. DÉF. L'ARITHMÉTIQUE des infinis eſt la méthode de déterminer les ſéries ou les ſuites des grandeurs d'une infinité de termes; ou de déterminer le rapport de la ſomme des termes d'une ſuite quelconque infinie à ſon dernier terme multiplié par la grandeur qui en exprime la multitude, ou combien il y a de termes dans la ſuite.

386. DÉF. ET PRINCIPE. 1°. Une grandeur x eſt infinie, lorſqu'elle contient une grandeur déterminée a quelconque plus de fois qu'on ne peut imaginer ou concevoir; 2°. elle eſt infinie, lorſqu'elle eſt parvenue à un point où telle grandeur finie qu'on lui ajoute ou qu'on lui retranche, le

résultat ne puisse s'exprimer par aucun nombre fini.

3°. Une grandeur a est infiniment petite par rapport à une grandeur x, lorsqu'elle est contenue dans cette grandeur x plus de fois qu'on ne peut imaginer ou exprimer.

4°. L'infiniment petite partie d'une grandeur a ajoutée ou ôtée de cette grandeur a ne l'augmente ni ne la diminue, de sorte qu'un infiniment petit peut être regardé comme zéro, par rapport à une grandeur déterminée; ainsi le produit d'une grandeur a par son infiniment petit b ne differe pas de zéro; donc $a \pm b a = a$; de même si x est une grandeur infinie & a une grandeur déterminée quelconque, on aura $x \pm a = x$, parce que a est un infiniment petit par rapport à la grandeur infinie x.

5°. Une grandeur infinie x est infiniment petite par rapport à son quarré; elle est infiniment petite du second ordre par rapport à son cube; car x étant infini est contenu dans x^2 une infinité de fois x, qu'on ne peut exprimer en nombre; donc x est infiniment petit de x^2, & par la même raison x^2 est infiniment petit de x^3, &c., ainsi $x^2 \pm x = x^2$; $x^3 \pm x^2 \pm x = x^3$; cela est évident (art. 4) x^2 étant infiniment petit de x^3 est zéro par rapport à x^3, & x étant l'infiniment petit de x^2 est l'infiniment petit de l'infiniment petit de x^3; par conséquent infiniment moindre qu'un terme qui lui même est zéro par rapport à x^3; on aura de même $x^4 \pm 3x^3 \pm cx^2 \pm dx \pm a \mp b = x^4$ (1). C. Q. F. B. R.

387. DÉF. La suite des nombres naturels ÷0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. x, a pour exposant l'unité; celle de leurs quarrés a 2 pour exposant;

(1) a, b, c & d représentent des quantités finies.

celle

celle de leurs cubes a 3 &c.; celle de leurs racines quarrées a $\frac{1}{2}$ pour exposant, celle de leurs racines cubes $\frac{1}{3}$, &c. & la suite des égaux 1, 1, 1, 1, 1, &c. a pour exposant zéro. Le nombre des termes de chaque suite est exprimé par le dernier plus un; dans la suite $\div$ 0, 1, 2, 3, 4, &c. x, le nombre des termes est $x+1$; on exprimera par s la somme de tous les termes de la suite des nombres naturels $\div$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. x, par s^2 la somme de leurs quarrés, par s^3 la somme de leurs cubes, &c. & par $s\frac{1}{2}$ la somme de leurs racines quarrées, par $s\frac{1}{3}$ la somme de leurs racines cubes, &c., le produit du dernier terme par le nombre des termes sera toujours exprimé par z, & le nombre des termes sera désigné par $y = x + 1$ dernier terme plus l'unité. Cela posé,

388. THÉOR. 1°. Dans la suite finie des nombres naturels, qui commence par zéro, $\div$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. la somme de tous les termes égale le quarré de la somme du dernier terme & de l'unité, moins le nombre des termes, le résultat divisé par 2.

2°. Dans la suite infinie la somme de tous les termes est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme l'unité est à l'exposant de la suite plus un, c'est-à-dire, comme un est à deux.

1°. *A dém.* que $s = \frac{(x+1)^2 - x - 1}{2}$.

DÉM. La somme de tous les termes de cette progression arithmétique $\div$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. x, est égale à la somme des extrêmes $0 + x$ multiplié par la moitié du nombre des termes $\frac{x+1}{2}$ ainsi $s = \frac{x^2+x}{2}$; mais $\frac{(x+1)^2 - x - 1}{2}$ =

$\frac{x^2+2x+1-x-1}{2} = \frac{x^2+x}{2}$; donc $s = \frac{(x+1)^2-x-1}{2}$ $= \frac{xx+x}{2}$. C. Q. F. 1°. D.

2°. Dans le cas de l'infini $s = \frac{x^2+x}{2} = \frac{x^2}{2}$ & le dernier terme x, multiplié par le nombre des termes $x+1$, est $xx + x = x^2 = z$ (386); donc $s : z :: \frac{x}{2} : x^2 :: \frac{1}{2} : 1 :: 1 : 2$; donc, &c. C. Q. F. 2°. D.

389. Théor. 1°. Dans la suite finie des nombres naturels $\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & f, & \&c. & x \\ \div 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \&c. & x \end{matrix}$, la somme s^2 des quarrés des termes de cette suite égale le cube de la somme du dernier terme & de l'unité, moins 3 fois la somme des termes de la suite, moins le nombre des termes de la suite, le résultat divisé par 3 (1).

2°. Si la suite est infinie, la somme des quarrés des termes de la suite est au quarré du dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme l'unité est à l'exposant de la suite des quarrés plus un, c'est-à-dire, comme 1 est à 3.

1°. *A démont.* que $s^2 = \frac{(x+1)^3-3s-x-1}{3} = \frac{y^3-3s-x-1}{3}$.

Dém. On a . . . . $b = a+1$, $c = b+1$, $d = c+1$, $f = d+1$, $x = f+1$ & le dernier terme plus un, $y = x+1$ } d'où

(1) La différence qui est entre ce théorême-ci & celui du n°.364 provient de ce que dans les suites du n°. 364, le premier terme est 1, & que dans celle-ci on prend 0 pour

$$\left.\begin{array}{l} b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \\ c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1 \\ d^3 = c^3 + 3c^2 + 3c + 1 \\ f^3 = d^3 + 3d^2 + 3d + 1 \\ x^3 = f^3 + 3f^2 + 3f + 1 \\ y^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \end{array}\right\} \text{d'où}$$

$y^3 = 3s^2 + 3s + x + 1$, à cause des termes qui se détruisent, & de $a = 0$; si l'on transpose les terme, on aura $s^2 = \frac{y^3 - 3s - x - 1}{3}$; mais $3s = \frac{3x^2 + 3x}{2}$, & $y^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; donc substituant, on aura $s^2 = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - \frac{3x^3 + 3x^2}{2} - x - 1}{3}$ $= \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6}$, somme des quarrés des nombres naturels, dont le plus grand & dernier terme est exprimé par x; conséquemment $\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6}$ est une formule pour trouver la somme des quarrés des termes de la suite des nombres naturels; c'est la même qu'on a trouvée (364).

2°. Si la suite des nombres naturels ÷ 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. x; est composée d'une infinité de termes ou devient infinie, *à dem.* que $s^2 : x :: 1 : 1 + 2 :: 1 : 3$.

Dans le cas de l'infini $s^2 = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = \frac{2x^3}{6}$ $= \frac{x^3}{3}$, parce que $3x^2$ & x sont des infiniment

---

le premier terme; de sorte que quoique la somme des termes soit la même; dans le premier cas, le nombre des termes est représenté par le dernier terme n, & dans le second cas, par le dernier terme x plus un.

petits par rapport à x^3 : & le dernier terme x^2, multiplié par le nombre des termes $x + 1$ donne $x^3 + x^2$, qui se réduit à $x^3 = z$, dans le cas de l'infini. Donc $s^2 : z :: \frac{x^3}{3} : x^3 :: \frac{1}{3} : 1 :: 1 : 3$. C. Q. F. 2°. D.

389. THÉOR. 1°. La somme des cubes des termes de la suite des nombres naturels . . . .
$a, b, c, d, f,$ &c. x
$\div 0, 1, 2, 3, 4,$ &c. x est égale à la 4e puissance du dernier terme plus un, moins 6 fois la somme des quarrés, moins 4 fois la somme des termes, moins la nombre des termes, le résultat divisé par 4, où cette somme des cubes est égale à la 4e puissance du dernier terme, plus 2 fois le cube de ce dernier terme, plus son quarré, le tout divisé par 4.

2°. Dans le cas de l'infini la somme des cubes est égale à la 4e puissance du dernier terme divisé par 4, ou cette somme des cubes est au cube du dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme l'unité est à l'exposant de la suite des cubes plus l'unité, c'est-à-dire comme 1 est à 4.

3°. En général, dans toute suite infinie la somme de tous les termes est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme l'unité est à l'exposant de la suite augmenté de l'unité, soit que cet exposant soit un nombre entier, ou une fraction, ou un nombre négatif quelconque.

1°. *A dém.* que $s^3 = \frac{(x+1)^4 - 6s^2 - 4s - x - 1}{4} = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4}$.

DÉM. On a . . . . . $b=a+1$, $c=b+1$, $d=c+1$, $f=d+1$, $x=f+1$, & le dernier terme plus un, $y=x+1$ } d'où

$$\left.\begin{array}{l} b^4=a^4+4a^3+6a^2+4a+1 \\ c^4=b^4+4b^3+6b^2+4b+1 \\ d^4=c^4+4c^3+6c^2+4c+1 \\ f^4=d^4+4d^3+6d^2+4d+1 \\ x^4=f^4+4f^3+6f^2+4f+1 \\ y^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \end{array}\right\}$$

d'où ajoutant ces équations & corrigeant, on aura à cause de a = zéro, $y^4 = 4s^3 + 6s^2 + 4s + x + 1$, d'où $s^3 = \frac{y^4-6s^2-4s-x-1}{4}$ (113, 114); mais $y^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$; $6s^2 = 2x^3 + 3x^2 + x$ (388), & $4s=2x^2+2x$; donc substituant, on aura $s^3 = \frac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1-2x^3-3x^2-x-2x^2-2x-x-1}{4}$, ou corrigeant, on aura $s^3 = \frac{x^4+2x^3+x^2}{4}$, formule qui indique que la somme des cubes des termes de la suite finie des nombres naturels ÷ 0, 1, 2, 3, 4 &c. x, est égale à la 4e puissance du dernier terme, plus à deux fois le cube du dernier terme, plus à son quarré, le résultat divisé par 4. C.Q.F. 1°.D.

2°. Si la suite devient infinie, dans ce cas $s^3 = \frac{x^4+2x^3+x^2}{4}$ devient $s^3 = \frac{x^4}{4}$, parce que $2x^3$ & x^2 sont des infiniment petits par rapport à x^4. On doit donc les négliger; mais le dernier terme de la suite des cubes, multiplié par le nombre des termes $x + 1$, donne $x^4 + x^3 = x^4 = z$ dans le cas de l'infini. On aura donc $s^3 : z :: \frac{x^4}{4} : x^4 :: \frac{1}{4} : 1 :: 1 : 4 :: 1 : 1 + 3$; c'est-à-dire, que la

ſomme des cubes des termes de la ſuite infinie des nombres naturels ÷ 0, 1, 2, 3, 4 &c. x, eſt au cube du dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme l'unité eſt à l'expoſant 3 de la ſuite des cubes, augmenté de l'unité. C. Q. F. 2°. D.

3°. Il eſt clair qu'il en ſera de même de toute autre ſuite infinie dont l'expoſant ſera un nombre entier.

Si on a, par exemple, la ſuite infinie des égaux 1, 1, 1, 1 &c. x, dont l'expoſant eſt zéro; il eſt clair que la ſomme de tous les termes égale le dernier terme 1 multiplié par le nombre des termes infini x. Donc la ſomme $s^0 = x$, d'où $s^0 : x :: 1 : 1 :: 1 : 0 + 1$, comme l'unité à l'expoſant zéro de la ſuite plus un.

Il reſte donc à faire voir, pour compléter la démonſtration du 3e cas, que la même proportion aura encore lieu, ſi l'expoſant de la ſuite eſt une fraction, ou un nombre négatif quelconque entier ou fractionnaire.

On voit par ce qui précede, que l'expoſant de la ſuite des égaux, celui des nombres naturels & ceux de toutes les puiſſances des termes de la ſuite infinie des nombres naturels forment les termes de la progreſſion arithmétique ÷ 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c. & que les rapports de la ſomme de chaque ſuite, au dernier terme multiplié par le nombre des termes, ſont exprimés par des fractions, qui ont l'unité pour numérateur, & pour dénominateur l'expoſant de la ſuite augmenté de l'unité, ſavoir, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ &c. On voit donc que tandis que les expoſans des ſuites forment une progreſſion arithmétique, qui commence par 0, & dont la différence

eſt 1, ſavoir, ÷ 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c., les conſéquens des rapports de la ſomme de chaque ſuite au dernier terme multiplié par le nombre des termes, forment une progreſſion arithmétique qui commence par l'unité, & dont la différence eſt auſſi l'unité ; ces rapports en effet ſont $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ &c.

390. D'où il ſuit, 1°. que ſi entre 0 & 1, expoſans de la ſuite des égaux & des nombres naturels, on prend une ſuite qui ait pour expoſant $\frac{1}{2}$, qui eſt celui de la ſuite des racines quarrées des nombres naturels, & qui eſt en même tems moyen proportionnel arithmétique entre 0 & 1 ; (car $0 : \frac{1}{2} \mathbin{\dot{:}} \cdot \frac{1}{2} : 1$), le conſéquent du rapport de la ſomme des racines au dernier terme multiplié par le nombre des termes, doit être auſſi un moyen arithmétique entre le conſéquent du rapport de la ſuite des égaux & le conſéquent du rapport de la ſuite des nombres naturels ; ainſi ſi entre 1 & 2 on prend un moyen arithmétique qui eſt $\frac{3}{2}$, cette fraction ſera le conſéquent du rapport de la ſuite des racines des nombres naturels au dernier terme multiplié par le nombre des termes ; on aura donc $s^{\frac{1}{2}} : z :: 1 : \frac{3}{2} :: 2 : 3 :: 1 : \frac{1}{2} + 1$, c'eſt-à-dire, que la ſomme des racines quarrées des termes de la ſuite infinie des nombres naturels eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme l'unité eſt à l'expoſant $\frac{1}{2}$ de la ſuite plus l'unité.

2°. Si on prend pour expoſant $\frac{1}{3}$, qui eſt celui des racines cubes des termes de la ſuite infinie des nombres naturels, & qui eſt le premier de deux moyens proportionnels arithmétiques entre 0 & 1, expoſans des égaux & des nombres naturels, le conſéquent du rapport de cette ſuite

des racines cubes au dernier terme multiplié par le nombre des termes, sera le premier de deux moyens proportionnels arithmétiques entre 1 & 2; or ce premier moyen proportionnel n'est autre chose que le premier terme plus la différence qui regne dans la progression arithmétique, & pour avoir cette différence, il faut (280) ôter le premier terme 1 du dernier 2, & diviser le reste 1 par le nombre des termes moins un; cette différence sera $\frac{1}{3}$; ainsi le conséquent cherché sera $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; donc la somme de la suite des racines cubes des nombres naturels $s^{\frac{1}{3}}$ sera au dernier terme, multiplié par le nombre des termes z comme $1 : \frac{4}{3} :: 3 : 4 :: 1 : \frac{1}{3} + 1$, c'est-à-dire, comme l'unité est à l'exposant de la suite, augmenté de l'unité. Ainsi de toute autre.

D'où en général, si une suite quelconque infinie a pour exposant une fraction quelconque $\frac{2}{5}$, on aura de même, la somme des termes de la suite est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme l'unité est à l'exposant de la suite augmenté de l'unité, c'est-à-dire, que $s^{\frac{2}{5}} : z :: 1 : \frac{2}{5} + 1 :: 1 : \frac{7}{5} :: 5 : 7$; car $\frac{2}{5}$ est le second de 4 moyens proportionnels arithmétiques entre 0 & 1; comme on voit $\div 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$; donc le conséquent du rapport doit être le second terme de 4 moyens proportionnels arithmétiques entre les conséquens correspondans 1 & 2 des rapports de la suite des égaux & celle des nombres naturels; ainsi nommant ces 4 moyens arith. x, y, t, u, on aura cette progression arith. $\div 1, x, y, t, u, 2$, dont $\frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$ est la différence; conséquemment $x = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$; $y = \frac{7}{5}$, qui est le conséquent cherché, puisque c'est le

second moyen proportionnel arithmétique entre 1 & 2; on aura donc $s^{\frac{2}{5}} : z :: 1 : \frac{2}{5} + 1 :: 1 : \frac{7}{5} :: 5 : 7$.

391. Sur quoi il faut remarquer, 1°. que lorsqu'une fraction $\frac{2}{5}$ exprime l'exposant d'une suite infinie, son dénominateur 5 indique le nombre des moyens proportionnels entre zéro & l'unité plus un, & le numérateur en désigne le rang; ainsi la fraction $\frac{2}{5}$ indique qu'entre zéro & 1 il y a 4 moyens proportionnels, dont la fraction $\frac{2}{5}$ est le second. Cela est vrai, car $\div 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$, forme une progression arith.

2°. Que, si l'exposant fractionnaire excede l'unité, son dénominateur désigne toujours le nombre des moyens proportionnels entre zéro & l'unité plus un, & son numérateur indique le rang qu'il occupe, qui sera entre un & 2 ou entre 2 & 3 &c. c'est-à-dire, que si l'exposant est $\frac{9}{7}$, il y a 6 moyens arithmétiques entre zéro & 1, & que $\frac{9}{7}$ occupe le 9e rang après zéro, & qu'il se trouve conséquemment entre 1 & 2; on aura donc cette progression arithmétique . . . . . .
$\div 0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7} = 1, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}, \frac{11}{7}, \frac{12}{7}, \frac{13}{7}, \frac{14}{7} = 2$ &c.
Ainsi $s^{\frac{9}{7}} : z :: 1 : \frac{9}{7} + 1 :: 1 : \frac{16}{7} :: 7 : 16$; ce qui fait voir que la somme des termes d'une suite infinie, qui a pour exposant $\frac{9}{7}$, est au dernier terme de la suite multipliée par le nombre des termes, comme 7 est à 16.

On voit donc que la même proportion a lieu, lorsque l'exposant de la suite est une fraction.

392. Il reste à démontrer que si la suite infinie a un exposant négatif entier ou fractionnaire, la somme de tous les termes est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme

l'unité est à l'exposant négatif plus un. Avant d'en venir là,

Il est clair, 1°. Que si on multiplie les termes de la suite infinie des nombres naturels par ceux de la suite des quarrés des termes de la même suite terme par terme, on aura une nouvelle suite infinie, qui aura pour exposant la somme des exposans des deux suites qui se sont multipliées ici, $1 + 2 = 3$; ce qui est évident, puisque cette nouvelle suite est celle des cubes des nombres naturels qui a 3 pour exposant.

2°. Que si on divise les termes de la suite des 4e, 5e, 6e ou 7e puissances, &c. des nombres naturels par les termes de la suite infinie des nombres naturels ou de leurs quarrés ou de leurs cubes, &c. terme par terme, on aura une nouvelle suite infinie, qui aura pour exposant l'exposant de la suite à diviser moins l'exposant de la suite qui divise. On voit clairement qu'en divisant les termes de la suite infinie des 4es puissances des nombres naturels par les termes de la suite des nombres naturels, terme par terme, on a la suite infinie des cubes, qui a pour exposant 3.

393. D'où il suit que les exposans des différentes suites des puissances ou racines des nombres naturels à l'infini, ont les mêmes propriétés que le calcul des exposans des différentes puissances d'une grandeur quelconque; conséquemment, si on divise la suite des nombres naturels par la suite des quarrés des termes de la même suite, on aura une nouvelle suite, qui aura pour exposant $1 - 2 = - 1$.

De même, si on divise la suite des racines quarrées, qui a pour exposant $\frac{1}{2}$ par celle des quarrés, la nouvelle suite aura pour exposant $\frac{1}{2} - 2 = - \frac{3}{2}$, &c.

394. Nous allons à présent démontrer que dans toutes les suites infinies qui ont un exposant négatif quelconque, comme dans celles qui l'ont positif, la somme de tous les termes est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme l'unité est à l'exposant de la suite plus un.

DÉM. Cette démonstration renferme deux cas, car l'exposant négatif est ou entier ou fractionnaire. Commençons par le supposer entier.

Soit cette suite infinie $\div 0^{-1}, 1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, 5^{-1}$ &c. x^{-1}. Je dis que $s^{-1} : z :: 1 : -1+1 :: 1 : 0$, c'est-à-dire, que la somme de tous les termes est infinie par rapport au dernier terme, multiplié par le nombre des termes. Cela est vrai; car cette suite infinie se change en celle-ci $\div \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. $\frac{1}{x}$ (380); mais x est infini; donc le dernier terme $\frac{1}{x} = 0$, qui étant multiplié par le nombre des termes $x + 1$ ou simplement x, donne zéro pour le produit du dernier terme par le nombre des termes.

Si on a la suite infinie $\div 0^{-3}, 1^{-3}, 2^{-3}, 3^{-3}, 4^{-3}, 5^{-3}$, &c. x^{-3}, on aura de même $s^{-3} : z :: 1 : 1-3 :: 1 : -2$; ce qui fait voir que la somme des termes de cette suite infinie est plus qu'infinie par rapport au dernier terme, multiplié par le nombre des termes, puisque le nombre -2 est au-dessous de zéro, considéré comme limite, & que le rapport de 1 à 0 est infini; on concevra aisément que ce rapport est plus qu'infini, si l'on fait attention que cette suite se change en celle-ci $\div \frac{1}{0^3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}$ &c. $\frac{1}{x^3}$. Or, dans cette suite infinie, x est infini; donc $\frac{1}{x} = 0$ est un infiniment petit du premier

ordre; donc $\frac{1}{x^3}$ eſt un infiniment petit du 3e ordre, ainſi ce terme $\frac{1}{x^3}$, multiplié par le nombre des termes $x + 1 = x$ eſt un infiniment petit du ſecond ordre $\frac{1}{x^2}$, ou un infiniment petit par rapport à $\frac{1}{x}$, qu'on peut regarder comme zéro.

395. Comme les expoſans négatifs avec les poſitifs & celui des égaux forment la prog. arith. ſuiv. $\div -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,$ &c.

$$\frac{1}{-3},\ \frac{1}{-2},\ \frac{1}{-1},\quad \frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \text{\&c.}$$

rapport de la ſomme de chaque ſuite infinie à ſon dernier terme, multiplié par le nombre des termes.

Si ſous chaque terme de cette progreſſion arithmétique des ſuites infinies, on écrit le rapport de la ſomme de chaque ſuite, à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes, on trouvera que les conſéquens des rapports des ſommes des ſuites négatives forment auſſi une progreſſion arithmétique négative, qui commence par zéro, lequel conſéquent zéro répond à la ſuite infinie, qui a pour expoſant -1, comme on voit ci-deſſus. Ceci entendu, on trouvera, comme ci-devant 391, que ſi une ſuite infinie a pour expoſant une fraction négative $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$ &c., en lui ajoutant l'unité, on aura le conſéquent du rapport de la ſomme de cette ſuite au dernier terme, multiplié par le nombre des termes; en effet, $-\frac{1}{2}$ eſt moyen proportionnel arithmétique entre -1 & 0; $-1 : -\frac{1}{2} : \cdot -\frac{1}{2} : 0$; donc le conſéquent du rapport de la ſomme de cette ſuite infinie au dernier terme multiplié par le nombre des termes, ſera un moyen proportionnel arithmétique entre

les conséquens o & 1 des rapports correspondans $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{1}$; or ce moyen proportionnel est $\frac{1}{2}$; ar

$o : \frac{1}{2} : \cdot \frac{1}{2} : 1$; on aura donc $s^{-\frac{1}{2}} : z :: 1 : -\frac{1}{2} + 1 :: 1 : \frac{1}{2} :: 2 : 1$; ce qui fait voir que la somme de tous les termes d'une suite infinie, dont l'exposant est $-\frac{1}{2}$, est double du dernier terme multiplié par le nombre des termes.

De même, si l'exposant de la suite infinie est $-\frac{2}{5}$, le conséquent du rapport de la somme des termes de cette suite au dernier terme multiplié par le nombre des termes sera $-\frac{2}{5} + 1 = \frac{3}{5}$,

& on aura $s^{-\frac{2}{5}} : z :: 1 : -\frac{2}{5} + 1 :: 1 : \frac{3}{5} :: 5 : 3$.

Car $-\frac{2}{5}$ est le second des 4 moyens arithmétiques entre o & -1, puisqu'on a $\div o, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1$; donc le conséquent du rapport de la somme des termes de cette suite infinie au dernier terme multiplié par le nombre des termes, doit être le second de 4 moyens proportionnels arithmétiques entre les conséquens o & 1 des rapports correspondans $\frac{1}{0}$ & $\frac{1}{1}$. Si on nomme ces 4 moyens arithmétiques x, y, t, u, on aura $\div o, x, y, t, u, 1$, progression arith. & l'on trouvera la différence qui y regne, en ôtant le premier terme zéro du dernier 1, & divisant le reste $1 - o = 1$ par le nombre des termes moins un, ici par 5 ; la différence est donc $\frac{1}{5}$; donc $x = o + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$, $t = \frac{3}{5}$, $u = \frac{4}{5}$; on aura donc $\div o, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$; on voit donc en général que l'exposant d'une suite plus l'unité est le conséquent du rapport de la somme des termes de cette suite au dernier terme multiplié par le nombre des termes.

396. Il suit donc de tout ce qui précede, que dans toute suite infinie quelconque la somme de

tous les termes eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme l'unité eſt à l'expoſant de la ſuite augmenté de l'unité; ſoit que l'expoſant ſoit poſitif ou négatif, entier ou fractionnaire. C. Q. F. 3°. D.

397. L'uſage de l'arithmétique des infinis eſt très-étendu. Il ſert en géométrie à déterminer les ſurfaces & la ſolidité de la plupart des corps, dont les rapports des élémens ſont connus; en ſtatique, à déterminer les centres de gravité, &c. Un ſeul exemple ſuffira pour en faire connoître l'utilité. Soit une ſuite infinie de grandeurs, qui ſoient entr'elles comme les racines quarrées des termes de la ſuite infinie des nombres naturels; cette ſuite aura pour expoſant $\frac{1}{2}$, & on aura $s^{\frac{1}{2}} : z :: 1 : \frac{1}{2} + 1 :: 1 : \frac{3}{2} :: 2 : 3$, c'eſt-à-dire, que la ſomme de cette ſuite de grandeurs eſt les $\frac{2}{3}$ du dernier terme multiplié par le nombre des termes; elle ſera donc égale au dernier terme multiplié par les $\frac{2}{3}$ de la quantité qui en exprime la multitude; c'eſt proprement trouver la ſurface de la parabole ordinaire qui eſt égale à ſa baſe multipliée par les $\frac{2}{3}$ de ſon axe, qui meſure le nombre de ſes élémens, comme on verra en géométrie, &c.

APPLICATION des principes établis dans ce Traité d'Arithmétique à la réſolution de pluſieurs Problêmes utiles & récréatifs.

398. PROB. DEVINER le nombre qu'une perſonne a penſé.

SOLUTION. Il faut dire à la perſonne, 1°. de doubler le nombre qu'elle a penſé, & d'y ajou-

ter 4; 2°. de multiplier la somme par 5; 3°. d'ajouter 13 au produit; 4°. de doubler la somme; 5°. d'y ajouter 3, & de multiplier le résultat par 5, & demander ce dernier produit, duquel on ôtera 345 : on aura un reste, dont on retranchera les deux derniers chiffres à droite, ce qui précédera sera le nombre pensé; car par ces opérations c'est proprement multiplier le nombre pensé par 100, & ajouter au produit 345; donc en ôtant du résultat 345, le reste est le nombre pensé suivi de 2 zéros.

Procédé. Soit le nombre pensé	11 =..	x
le double plus 4 est	26 =..	$2x + 4$
qui étant multip. par 5 donne	130 =..	$10x + 20$
ajoutant 13 & doublant, on aura	286 =..	$20x + 66$
ajoutant 3, on aura	289 =..	$20x + 69$
multipliant par 5, on aura ..	1445 =..	$100x + 345$
ôtant 345	345	345
Il reste	1100 =..	$100x$,

divisant par 100, ou effaçant les deux zéros, on aura $11 = x$, nombre pensé. C. Q. F. Dét.

399. AUTRE SOLUT. Dites à la personne, 1°. de penser un nombre; 2°. de multiplier ce nombre par lui-même & d'ajouter au produit le double du nombre pensé plus 11; 3°. de multiplier la somme par 4, & de vous dire quel est le résultat; vous en ôterez 40; le reste sera un quarré parfait, dont la moitié de la racine quarrée moins un sera le nombre que la personne aura pensé.

DÉM. Soit le nombre pensé . . . . . 7 = x
ce nombre multiplié par 7 donne . . 49 = xx
ajoutant $7 + 7 + 11 = 25$,

on aura . . . . $74 = xx + 2x + 11$
multipliant cette somme
par 4, on aura. . . . . $296 = 4xx + 8x + 44$
ôtant 40, il reste . . . . . $256 = 4xx + 8x + 4$
dont la racine quarrée est $16 = 2x + 2$
la moitié est. . . . . $8 = x + 1$
ôtant l'unité, il reste . . . $7 = x$, nombre pensé. Ce procédé est général pour tout autre nombre pensé. Donc, &c. C. Q. F. Dét.

400. PROB. On demande à un berger combien il a de moutons dans sa bergerie. Il répond qu'il en ignore le nombre; mais qu'il sait qu'en les comptant 2 à 2, il en reste un; 3 à 3, il en reste un; 4 à 4, il en reste un; 5 à 5, il en reste un; 6 à 6, il en reste un; & qu'en les comptant 7 à 7, il n'en reste point. On demande d'en déterminer le nombre.

SOLUTION. J'observe que le nombre cherché tel qu'il puisse être, doit contenir le produit successif de ces nombres 2, 3, 4, 5, 6, plus une unité. Ce nombre est donc $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 721$ nombre des moutons de la bergerie; en effet il satisfait aux conditions du problême. Il contient 1°. 360 fois 2 moutons plus un; 2°. 240 fois 3 moutons plus un; 3°. 180 fois 4 moutons plus un; 4°. 144 fois 5 moutons plus un; 5°. 120 fois 6 moutons plus un, & 103 fois 7 moutons exactement. C. Q. F. Dét.

401. PROB. Un fils demande à son pere de lui donner autant d'argent qu'il en a dans sa bourse; le pere lui accorde sa demande; en conséquence il donne 3 écus aux pauvres. Il rentre chez lui, & prie sa mere de lui donner autant d'argent qu'il lui en reste; elle le fait : il sort & donne 3 écus pour les prisonniers. A quelques pas de-là,

il

il rencontre ſon grand-pere, & le prie de lui donner autant d'argent qu'il lui en reſte; ſa demande eſt accordée; il donne 3 écus à une Dame de Charité, pour ſoulager les pauvres malades. Il rentre chez lui avec un écu. Combien avoit-il d'argent en premier lieu?

SOLUTION. J'exprime par x ce qu'il avoit, $2x - 3$ eſt ce qui lui reſte lorſqu'il va trouver ſa mere; elle lui donne $2x - 3$; il a donc $4x - 6$. Il donne 3 écus, il lui reſte $4x - 9$, lorſqu'il rencontre ſon grand-pere, qui lui donne $4x - 9$; il a donc $8x - 18$; il en ôte 3 écus qu'il donne à la Dame de Charité; il rentre donc chez lui avec $8x - 21 = 1$ écu, ſelon l'état de la queſtion; d'où $8x = 22$ écus. Si de part & d'autre on diviſe par 8, on aura $x = 2$ écus $\frac{6}{8}$ ou 8ᵗᵗ 5ˢ. Ce fils avoit donc 8ᵗᵗ 5ˢ. Ce nombre ſatisfait à la queſtion. Car ſon pere lui donne 8ᵗᵗ 5ˢ; il a donc 16ᵗᵗ 10ˢ; il donne 3 écus = 9ᵗᵗ aux pauvres, il lui reſte 7ᵗᵗ 10ˢ; ſa mere lui en donne autant, il a 15ᵗᵗ; il donne 9ᵗᵗ aux priſonniers, il lui reſte 6ᵗᵗ; ſon grand-pere lui donne 6ᵗᵗ, il a 12ᵗᵗ; il donne 9ᵗᵗ à la Dame de Charité, & il lui reſte 3ᵗᵗ ou un écu. C. Q. F. Dét.

402. PROB. Trois particuliers comptent leur argent. Il arrive que le premier & le ſecond ont enſemble 148ᵗᵗ, le ſecond & le 3ᵉ 166ᵗᵗ, le premier & le 3ᵉ 182. Combien ont-ils chacun?

SOLUTION. Comme j'ignore ce qu'ils ont chacun, j'exprime par x l'argent du premier, par y celui du ſecond, par z celui du 3ᵉ, & ſuivant l'état de la queſtion j'ai,

1°. $x + y = 148$ᵗᵗ	J'ôte la premiere équation de la ſeconde, & j'ai
2°. $y + z = 166$ᵗᵗ	
3°. $x + z = 182$ᵗᵗ	$z - x = 166 - 148 = 18$;

j'ajoute cette équation avec la 3ᵉ; j'ai $2z = 200$, d'où $z = 100$. On aura donc $x = 82$ & $y = 66$; on voit donc que le premier a 82ᵗᵗ, le second 66ᵗᵗ; & le 3ᵉ 100ᵗᵗ; en effet, ces 3 nombres satisfont aux conditions du problême; 1°. $82 + 66 = 148$; 2°. $66 + 100 = 166$; 3°. $82 + 100 = 182$. Donc, &c. C. Q. F. Dét.

403. PROB. Un pere par testament donne à l'ainé de ses enfans 1000ᵗᵗ $= a$, plus le $\frac{1}{7}$ du reste de son bien; au second 2000ᵗᵗ $= 2a$, & le $\frac{1}{7}$ du reste; au 3ᵉ 3000ᵗᵗ $= 3a$ & le $\frac{1}{7}$ du reste, ainsi de suite, donnant à chaque enfant 1000ᵗᵗ de plus qu'à celui qui précede & le $\frac{1}{7}$ du reste. Il arrive que leurs parts sont égales; on demande le bien que le pere a laissé & le nombre de ses enfans.

SOLUTION. J'exprime par x le bien du pere, & j'agis selon l'état de la question. Je trouve 1°. que la part de l'ainé est $1000 + \frac{x - 1000}{7} = \frac{7000 + x - 1000}{7} = \frac{6000 + x}{7} = \frac{6a + x}{7}$.

2°. Si j'ôte la part du premier enfant $\frac{6a + x}{7}$ du bien du pere x, j'aurai pour reste $x - \frac{6a - x}{7} = \frac{7x - 6a - x}{7} = \frac{6x - 6a}{7}$: de ce reste, je dois ôter $2000 = 2a$ pour donner au second enfant, & diviser le reste par 7; le quotient plus $2a$ sera la part du second enfant. Or $\frac{6x - 6a}{7} - 2a = \frac{6x - 20a}{7}$; divisant ce reste par 7, j'ai $\frac{6x - 20a}{49}$, à quoi ajoutant $2a$, j'ai pour la part du second $2a + \frac{6x - 20a}{49} = \frac{98a + 6x - 10a}{49} = \frac{78a + 6x}{49}$, part du second; mais,

par hypothèse, toutes les parts sont égales, on aura donc cette équation, $\frac{6a+x}{7} = \frac{78a+6x}{49}$, ou multipliant par 7 les termes de la fraction $\frac{6a+x}{7}$, on aura $\frac{42a+7x}{49} = \frac{78a+6x}{49}$, ou $42a + 7x = 78a + 6x$, corrigeant l'expression, on aura $x = 36a =$ 36000 ₶, bien du pere. L'ainé a donc $\frac{6a+x}{7} = \frac{42000}{7} = 6000$ ₶, & chacun des autres enfans autant. Pour avoir le nombre des enfans, il faut diviser le bien 36000 ₶ par 6000 ; le quotient 6 est le nombre des enfans. Ce bien satisfait aux conditions du problême.

Le 1er a 1000 ₶ + 5000, ou 1000 + $\frac{35000}{7}$,
Le 2e . . 2000 + 4000, ou 2000 + $\frac{28000}{7}$,
Le 3e . . 3000 + 3000, ou 3000 + $\frac{21000}{7}$,
Le 4e . . 4000 + 2000, ou 4000 + $\frac{14000}{7}$,
Le 5e . . 5000 + 1000, ou 5000 + $\frac{7000}{7}$,
Le 6e . . 6000 + 0, ou 6000, & le 7e du reste o. C. Q. F. Dét.

404. PROB. Cinq Canonniers, 5 Dragons, 5 Grenadiers & 15 Soldats de différens Régimens sont pris à la maraude. Le Général décide que 15 seront pendus, & enjoint au Colonel d'Artillerie de faire mettre ces 30 hommes sur un même alignement dans l'ordre qu'il voudra, & qu'ensuite commençant par la gauche, on les compteroit de suite, que le 9e seroit pendu, & que lorsqu'on seroit à la fin de la ligne on reviendroit par la gauche, chacun restant dans sa position jusqu'à ce que la ligne soit réduite à 15 hommes qui auroient leur grace.

Le Colonel du Corps Royal d'Artillerie, Géomètre, voulant sauver ses Canonniers, les Grenadiers & les Dragons, fait placer ces 30 hommes de gauche à droite dans l'ordre qui suit, 4 Canonniers, 5 Soldats, 2 Grenadiers, un Soldat, 3 Dragons, 1 Soldat, 1 Canonnier, 2 Soldats, 2 Dragons, 3 Soldats, 1 Grenadier, 2 Soldats, 2 Grenadiers & un Soldat, comme on voit ci-dessous (1).

62351 4 2 13 564 21 3
cccc; *sssss*; *gg*; *s*; *ddd*; *s*; *c*; *ss*; *dd*; *sss*; *g*; *ss*; *gg*; *s*.

Avec un peu d'attention on reconnoîtra que le Colonel pour faire sa disposition, aura mis en ligne droite 30 jetons, & aura rejetté tous ceux qui se sont trouvés les 9es, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que 15 jetons; les places vuides lui ont indiqué l'emplacement des 15 Soldats (2). C. Q. F. Dét.

405. PROB. Trois dés étant mis de suite sur une table, deviner les points de chaque dé.

SOLUTION. 1°. Dites à la personne qui a disposé les dés de doubler le nombre que marque le premier dé à gauche; 2°. d'y ajouter 5 & de multiplier la somme par 5; 3°. d'ajouter au produit le nombre du dé du milieu & de multiplier le résultat par 10; 4°. d'ajouter au produit le nombre du dernier dé plus 12, & d'ôter du résultat 262;

---

(1) On a désigné par un *c* chaque canonnier, par un *g* chaque grenadier, par un *d* chaque dragon, & par un *s* chaque soldat. Les chiffres qui sont au-dessus des *s* désignent à quel tour chaque soldat est tombé au sort.

(2) On voit, d'après ce problême, combien une telle maniere de déterminer ceux de plusieurs coupables qui doivent périr, seroit injuste, puisqu'alors il n'y auroit plus de hasard : leur mort dépendroit inévitablement d'un arrangement qu'on seroit maître de diriger.

les chiffres du reste représenteront les points des dés dans le même ordre qu'ils sont placés.

Soient, *par exemple*, les trois dés marqués *planche* 2, *fig.* 5, dont les points sont 6, 3 & 4.

Procédé. Le double de 6 est 12; on y ajoute 5; on a 17, qu'on multiplie par 5; on a 85 : on y ajoute les points 3 du dé du milieu; on a 88: on multiplie cette somme 88 par 10; on ajoute au produit 880 le nombre 4 du 3e dé plus 12; on a 896, dont on ôte 262, le reste 634 désigne les points de chaque dé, savoir, le chiffre qui est au rang des centaines indique les points du premier dé 6; celui des dixaines, ceux du second dé 3; le chiffre des unités, les points 4 du 3e dé.

La raison pour laquelle on fait ôter 262 du dernier résultat, se déduit de l'opération même, 1°. en doublant le premier dé 6, y ajoutant 5, multipliant le tout par 5, on a nécessairement un produit de 2 chiffres, qui contient 25 plus le premier dé 6, multiplié par 10, en effet, 85 = 60 + 25 : on y ajoute le dé 3 du milieu; on a 88 = 63 + 25 : on multiplie le tout par 10, on a 880 = 630 + 250; on ajoute le 3e dé 4 plus 12, ou 16; on a 896 = 634 + 262; donc faisant ôter 262 du dernier résultat 896, il reste 634, dont chaque caractere marque dans le même ordre les points de chaque dé. C. Q. F. Dét.

406. PROB. On demande dans une assemblée de deviner la personne de la compagnie qui prendra une bague posée sur une table, & de déterminer la main, le doigt & la jointure où la bague est placée.

SOLUTION. 1°. Dites à quelqu'un de la compagnie de doubler le rang qu'occupe la personne qui a pris la bague & d'ajouter 7 à ce nombre; 2°. de

multiplier cette somme pas 5 & d'ajouter 11 au produit, si la personne a la bague à la main droite, ou 12, si elle l'a placée à la main gauche; 3°. de multiplier le tout par 10 & de joindre au produit le nombre du doigt, ou le rang qu'il occupe, commencant par le pouce de la main où est la bague; 4°. de multiplier le tout par 10, & d'ajouter le nombre de la jointure où est placée la bague plus 45, & de vous donner le résultat duquel vous ôterez 4545. Vous aurez pour reste au moins 4 chiffres, dont le premier à gauche indiquera le rang qu'occupera dans l'assemblée la personne qui aura pris la bague, le second chiffre la main où elle aura la bague, le 3e le doigt, & le 4e la jointure ou la phalange du doigt où sera la bague.

Procédé. Supposons que la 8e personne ait mis la bague au 4e doigt de la main droite, à la 3e jointure ou phalange.

1°. On ajoutera 7 au double de 8; on aura 23 qu'on multipliera par 5, on aura 115 = 80 + 35, à quoi on ajoutera 11 (parce que la bague est à la main droite); on multipliera la somme 126 = 81 + 45 par 10, on aura 1260=810+450; on ajoutera le rang 4 qu'occupe le rang de la main, on aura 1264 = 814 + 450; on multipliera le tout par 10, on ajoutera la jointure 3 plus 45, on aura 12688=8143+4545; donc si on ôte 4545 du résultat, on aura pour reste 8143 qui indiquera que la 8e personne a la bague à la main droite au 4e doigt & à la 3e jointure ou phalange. L'opération développée indique la raison pour laquelle il faut, en suivant ce procédé, retrancher 4545 du dernier résultat pour avoir un reste de 4 chiffres dont le premier à gauche indique la personne, le second la main, le 3e le doigt, & le 4e la jointure.

Il faut observer que si c'étoit la 10e, la 11e ou 12e personne, &c., qui eût pris la bague, le procédé seroit le même; on ôteroit 4545 du dernier résultat; le reste auroit 5 chiffres dont les deux premiers à gauche désigneroient la personne ou le rang qu'elle occupe, C. Q. F. B. R.

407. PROB. Deviner à la vue d'un cadran l'heure à laquelle une personne se propose de se lever le lendemain.

SOLUTION. Dites à la personne de mettre son doigt à volonté sur une heure du cadran, autre que l'heure à laquelle elle est se propose de se lever; ajoutez par la pensée 12 à l'heure qu'elle indique par son doigt. Supposons qu'elle indique 4 heures, dites-lui de prononcer à voix basse sur 4 heures indiquées par son doigt, l'heure à laquelle elle veut se lever & de suivre en rétrogradant jusqu'à 16 où elle fixera son doigt. Elle indiquera elle-même l'heure de son lever. Supposons que ce soit à 9 heures, elle prononcera tout bas 9 sur 4 heures, 10 sur 3 heures, 11 sur 2 heures, 12 sur 1 heure, 13 sur midi, 14 sur 11 heures & 16 sur 9 heures, où elle fixera son doigt. Alors vous lui direz qu'elle veut se lever le lendemain à 9 heures du matin. C. Q. F. Dét.

408. PROB. Deviner une suite impaire de nombres qu'une personne aura pensé.

SOLUT. Supposons que la personne ait pensé 7 nombres différens. Demandez-lui la somme du 1er & du 2e, celle du 2e & 3e, celle du 3e & 4e, celle du 4e & 5e, celle du 5e & 6e, celle du 6e & 7e ou dernier nombre; enfin la somme du premier & du 7e, ce qui donne une suite de 7 sommes qu'on suppose être les suivantes, 6, 9, 12, 16, 17, 19, 13. Si on ajoute ensemble

les quatre ſommes 6 + 12 + 17 + 13 = 48 qui occupent les rangs impairs, & qu'on en ôte les 3 ſommes 9 + 16 + 19 = 44 qui occupent les rangs pairs, le reſte 4 ſera double du premier nombre que la perſonne a penſé, par conſéquent. . . . .

Le premier nombre penſé eſt 2,
le ſecond 4,
le troiſieme 5,
le quatrieme 7,
le cinquieme 9,
le ſixieme 8,
le ſeptieme 11,

En effet ces nombres 2, 4, 5, 7, 9, 8, 11, ſatisfont à la queſtion (1). C. Q. F. Dét.

409. PROB. Deviner une ſuite paire de nombres qu'une perſonne aura penſé, *par exemple*, ſix nombres r, t, u, x, y, z.

SOLUTION. Demandez à la perſonne la ſomme du premier & du ſecond nombre, celle du ſecond & du 3e, celle du 3e & du 4e, celle du 4e & du 5e, celle du 5e & du 6e, enfin la ſomme du ſecond nombre & du 6e ou dernier; ce qui donne une ſuite de ſommes qu'on ſuppoſe être les ſuivantes 8, 13, 18, 22, 27, 20. Si on ajoute enſemble les 3 ſommes 13+22+20=55 qui occupent les rangs pairs, & que ſans avoir égard à la 1ere ſomme 8,

(1) Si l'on exprimoit par lettres les différentes équations données, & qu'on exprimât par x le premier nombre, on verroit que l'opération indiquée donneroit la valeur de $2x$. C'eſt ainſi que dans le problême n°. 402, en ajoutant la premiere & la 3e équation, & en ôtant de leur ſomme la 2e, on eût trouvé le double du premier terme x. On trouveroit de même, en opérant ſur les lettres, la raiſon du procédé du problême ſuivant 409.

on ôte la 3e & la 5e sommes $18 + 27 = 45$, le reste 10 exprimera le double du second nombre pensé; ainsi le premier nombre que la personne a pensé est $r = 3$, le second $t = 5$, le 3e $u = 8$, le 4e $x = 10$, le 5e $y = 12$, & le 6e $z = 15$; en effet ces nombres satisfont aux conditions de la question. C. Q. F. Dét.

410. PROB. On introduit un aveugle dans une assemblée de Demoiselles; trompé par le bruit qu'il entend, il leur dit: bon jour les 24 belles Demoiselles; une d'entr'elles lui répond: nous ne sommes pas 24, mais si nous étions 5 fois ce que nous sommes, nous serions autant au-dessus de 24 que nous sommes au-dessous de ce nombre. On demande le nombre des Demoiselles.

SOLUTION. Si on exprime ce nombre par x, on aura, suivant l'état de la question, $5x - 24 = 24 - x$, d'où $6x = 48$, & divisant de part & d'autre par 6, on aura $x = 8$ nombre des Demoiselles; en effet 5 fois 8 font 40 qui surpasse 24 de 16, comme 24 surpasse 8 du même nombre 16. C. Q. F. Dét.

411. PROB. Un pélerin a fait trois voyages à Rome, & dit qu'au premier il avoit doublé son argent & dépensé 25 ₶; qu'au second voyage il avoit triplé ce qui lui étoit resté & avoit dépensé 30 ₶; qu'enfin dans le 3e voyage, il avoit doublé ce dernier reste, n'avoit dépensé que 36 ₶ & qu'il lui restoit en bourse 269 ₶. On demande avec combien d'argent il étoit parti pour le premier voyage.

SOLUTION. J'exprime cette premier somme par x, & suivant l'état de la question j'ai,

1°. $2x - 25$, à la fin du premier voyage ;
2°. $6x - 75 - 30$, à la fin du second voyage;
3°. $12x - 150 - 60 - 36$, à la fin du 3e & dernier voyage ; mais ce dernier reste $12x - 150 - 60 - 36$, ou $12x - 246$ doit être égal à 269^tt^. Donc on a cette équation $12x - 246 = 269^{tt}$, d'où $12x = 515^{tt}$, d'où $x = \frac{515}{12} = 42^{tt}\ \frac{11}{12}$, ou $x = 42^{tt}\ 18^{s}\ 4^{d}$. Ce pélerin avoit donc en partant pour son voyage de Rome 42^tt^ 18^s^ 4^d^. Ce nombre remplit les conditions du problême. C. Q. F. Dét.

412. PROB. Un Fermier dit, si je vends 15^tt^ le setier du bled qui me reste, j'acheterai de M. le marquis la métairie qu'il veut vendre, & j'aurai 620^tt^ de reste; si je ne vends mon bled que 12^tt^ le septier, je serai obligé d'emprunter 7000^tt^ pour faire cet achat. On demande combien il a de septiers de bled & le prix de la métaire.

SOLUTION. Si on exprime par x le nombre des septiers de bled, & par z le prix de la métairie, on aura, suivant l'état de la question,

1°. $15x - 620^{tt} = z$ }
2°. $12x + 7000^{tt} = z$ } Donc $15x - 620 = 12x + 7000$, d'où corrigeant & transposant, on aura $3x = 7620$; divisant de part & d'autre par 3, on aura $x = \frac{7620}{3} = 2540$, nombre des setiers de bled. On aura le prix de la métairie par cette équation $z = 15x - 620 = 15 \times 2540 - 620 = 37480^{tt}$, prix de la métairie. C. Q. F. Dét.

413. PROB. Un Abbé présente à des Dames du tabac dans une jolie tabatiere dont elles sont enchantées. Une de ces Dames demande ce que cette jolie tabatiere lui coûte; l'Abbé répond qu'elle lui

coûte un nombre de louis d'or dont le double ôté de 36, donnera pour reste 4 fois le nombre des louis qu'elle lui a coûté. Votre réponse est une énigme que M. le Chevalier voudra bien nous expliquer, repliqua cette Dame ; volontiers Madame, dit le Chevalier.

SOLUTION. Quel que soit le nombre de louis que coûte cette tabatiere, je le désigne par x ; & comme, selon M. l'Abbé, 2 fois ce nombre x ôté de 36 donne pour reste 4 fois ce nombre x, j'aurai cette expression $36 - 2x = 4x$; or si 36 louis moins deux fois le nombre de louis que j'ignore égale 4 fois ce nombre, j'aurai 36 égale à 6 fois ce nombre x inconnu ; donc $x = \frac{36}{6} = 6$ louis d'or, prix de la tabatiere ; en effet ce nombre satisfait à la question, $36 - 12 = 24 = 4 \times 6$. C. Q. F. Dét.

414. PROB. Un pere voulant savoir si son fils profitoit des leçons de mathématiques qu'un maître lui donnoit, lui montre une bourse de 9 louis d'or, & lui dit : si tu peux en faire deux parts, dont la plus grande, divisée par la plus petite fasse 9, je te donne la plus grande.

SOLUTION. Ce fils intelligent exprime la plus grande part par x, & la plus petite par y ; & de l'état de la question il déduit les deux équations suivantes . . . .

1°. $9 = x + y$; 2°. $9 = \frac{x}{y}$; de celle-ci, il conclut que $9y = x$, & substituant cette valeur de $x = 9y$ dans la premiere équation $9 = x + y$, il y a $9 = 9y + y$; il fait observer que $9y + y$ est fait de y multiplié par $9 + 1$; ainsi en divisant de part & d'autre par $9 + 1$, il a $y = \frac{9}{9+1} = \frac{9}{10}$, petite part ; donc $x = 9y = 9 \times \frac{9}{10}$

$= \frac{81}{10} = 8 + \frac{1}{10}$, part du fils ; en effet, ces deux parts $8 + \frac{1}{10}$ & $\frac{9}{10}$ font 9 louis. C. Q. F. Dét.

415. PROB. L'âge d'un pere eſt triple de celui de ſon fils, on demande dans combien d'années l'âge du pere ne ſera que double de celui qu'aura le fils, & ſi cela eſt poſſible ?

SOLUTION. Si x déſigne l'âge actuel du fils ; celui du pere eſt $3x$; or dans un certain tems t on veut que le pere n'ait plus que le double de l'âge du fils, il s'agit donc de déterminer le nombre des années exprimées par t ; or par l'état de la queſtion, on a cette équation $3x + t = 2x + 2t$, corrigeant l'expreſſion, on a $x = t$; ce qui fait voir que tel âge qu'ait le pere, pourvu qu'il ſoit triple de l'âge du fils, dans un nombre d'années égal à l'âge actuel du fils, le pere n'en aura plus que le double.

Soit l'âge du pere 45 ans, l'âge du fils 15 ; en ajoutant 15 de part & d'autre, le fils aura alors 30 ans & le pere 60 ; donc, &c. C. Q. F. Dét.

416. PROB. Un Evêque dit à ſon neveu, qui apprenoit les mathématiques, je te donnerai ce que j'ai de louis dans la main, ſi tu détermine combien il y en a ; pour t'en faciliter la découverte, je te dirai que ſi tu multiplie ce nombre de louis d'or par lui-même, & que tu y ajoutes 8 fois ce même nombre, le réſultat ſera 65.

SOLUTION. Le neveu exprime par x le nombre de louis que l'Evêque a dans ſa main ; & de l'état de la queſtion, il forme cette équation $xx + 8x = 65$, qui eſt du ſecond degré. Pour la réſoudre il ſe rappelle qu'il faut ajouter de part & d'autre le quarré 16 de la moitié 4 du coëfficient 8 du ſecond terme $8x$; il a $xx + 8x + 16 = 65 + 16 = 81$, dont le premier membre eſt

un quarré parfait (167); ainsi tirant de part & d'autre la racine quarrée, il a $x + 4 = 9$, d'où $x = 5$, nombre des louis que l'Evêque avoit dans sa main, & qu'il donna avec joie à son neveu pour l'encourager à cultiver les mathématiques. C. Q. F. Dét.

417. Principe. Tout nombre impair égale l'unité plus un nombre pair. Cela est évident: $3 = 2 + 1$; $7 = 6 + 1$; $9 = 8 + 1$ &c. En général, si a représente un nombre pair quelconque, tout nombre impair sera représenté par $a + 1$, & le quarré de tout nombre impair sera représenté par cette formule $a^2 + 2a + 1$, quarré impair, dont la petite moitié $\frac{a^2 + 2a}{2}$ est un nombre pair, dont le quarré $\frac{a^4 + 4a^3 + 4a^2}{4}$, étant ajouté au quarré impair $a^2 + 2a + 1$, on aura un quarré parfait impair $\frac{a^4 + 4a^3 + 4a^2}{4} + a^2 + 2a + 1$, qui devient en donnant le même conséquent $\frac{a^4 + 4a^3 + 8a^2 + 8a + 4}{4}$, dont la racine quarrée est $\frac{a^2 + 2a + 2}{2} = \frac{a^2}{2} + a + 1$, qui est un nombre impair. Ce principe donne la solution du problême qui suit.

418. 1°. Déterminer deux quarrés, dont la somme soit un quarré parfait.

2°. 3 quarrés, dont la somme soit aussi un quarré parfait.

Solution. Je prends à volonté le nombre impair 3, dont le quarré 9 est le premier; je l'ajoute au quarré 16; de sa petite moitié 4, j'ai $9 + 16 = 25$, quarré parfait dont la racine est 5; & si je fais le quarré de la petite moitié 12 de 25, j'aurai 144 pour le 3e quarré cherché,

de ſorte que $9 + 16 + 144 = 169$, nombre quarré dont la racine eſt 13. Si on avoit pris 25 pour le premier quarré impair, on auroit 144 pour le ſecond; leur ſomme auroit été un nombre quarré 169; & pour 3e quarré on auroit eu 7056, quarré de 84, petite moitié de 169; en effet, ces 3 quarrés $25 + 144 + 7056 = 7225$, quarré dont la racine eſt 85 &c. On voit qu'en ſuivant ce procédé, on trouvera tant de quarrés qu'on voudra, dont la ſomme ſera un quarré parfait. C. Q. F. 1°. & 2°. Dét.

419. PROB. Déterminer 2 nombres, dont la ſomme & la différence ſoient chacune un nombre quarré.

La ſolution de ce problême eſt fondée ſur ce principe : ſi on ajoute à la ſomme des quarrés de deux nombres quelconques, ou ſi l'on en retranche le double du produit de ces deux nombres, le réſultat ſera un quarré parfait; ce qui indique qu'il faut prendre pour premier nombre la ſomme des quarrés de deux nombres quelconques, & pour ſecond nombre le double de leur produit; ſi on choiſit les nombres 4 & 5, le premier nombre ſera $16 + 25 = 41$; le ſecond, $4 \times 5 + 4 \times 5 = 40$; en effet, $41 + 40 = 81$, nombre quarré, & $41 - 40 = 1$ quarré. Leur ſomme & leur différence ſont des quarrés. Ainſi des autres. C. Q. F. Dét.

420. PROB. Trouver trois nombres, tels que le quarré du plus grand égale la ſomme des deux autres.

SOLUTION. Le premier de ces nombres eſt toujours le double d'un nombre pris à volonté augmenté de l'unité. Le ſecond eſt égal au double du nombre choiſi, multiplié par un nombre qui l'excede d'une unité.

Le 3e égale le second augmenté d'une unité.

Si on choisit 6, le premier nombre sera 13 ; le second, $12 \times 7 = 84$, & le 3e, 85. En effet, $85 \times 85 = 84 \times 84 + 13 \times 13$, ou, faisant les produits, on a $7225 = 7056 + 169$. On trouvera donc tant de nombres qu'on voudra 3 à 3, tels que le quarré du plus grand soit égal à la somme des quarrés des deux autres ; d'ailleurs tous les multiples de ces 3 nombres, 3, 4, 5 satisfont à la question. C. Q. F. Dét.

421. PROB. Vingt compagnies de grenadiers emportent une place d'assaut. Il ne reste après l'action que 9 capitaines, 13 lieutenans, 15 sous-Lieutenans, 300 grenadiers & 30 sergens. Le Général, pour témoigner sa satisfaction, fait donner 6^{tt} à chaque grenadier, 12^{tt} à chaque sergent. Quant au corps des officiers, il leur fait distribuer 27720^{tt}, & ordonne que 3 capitaines aient autant que 5 lieutenans, & que 7 lieutenans aient autant que 10 sous-lieutenans ; que revient-il à chacun de ces officiers ?

SOLUTION. Exprimons par c la part du capitaine, par l celle du lieutenant, par s celle du sous-lieutenant, & suivons l'état de la question, nous en déduirons ces équations.

1°. $3c = 5l$ } d'où $c = \frac{5l}{3}$

2°. $7l = 10s$ } $l = \frac{10s}{7}$ d'où $5l = \frac{50s}{7}$ & $\frac{5l}{3} = \frac{50s}{7 \times 3} = \frac{50s}{21} = c$. Si on multiplie de part & d'autre

par 9, on aura . . . . $9c = \frac{450s}{21}$;

on a trouvé $l = \frac{10s}{7}$, multipliant par

13, on aura . . . . $13l = \frac{130s}{7}$

on a aussi . . . . $15s = 15s$

Ajoutant ces 3 équations, on aura $9c + 13l + 15s = \frac{450s}{21} + \frac{130s}{7} + 15s = 27720$; si l'on fait disparoître les fractions, en multipliant tous les termes par 21, on aura . . . . $450s + 390s + 315s = 27720 \times 21$, d'où $1155s = 582120$; divisant de part & d'autre par 1155, on aura, 1°. $s = 504$ᵗᵗ, part du sous-lieutenant; 2°. $l = \frac{10s}{7} = \frac{5040}{7} = 720$; 3°. $c = \frac{50s}{21} = \frac{5l}{3} = \frac{3600}{3} = 1200$ᵗᵗ, part du capitaine. Celle du lieutenant est 720ᵗᵗ, & celle du sous-lieutenant 504ᵗᵗ. Ces nombres satisfont aux conditions de la question. C. Q. F. Dét.

422. PROB. Un Notaire, chargé de l'exécution d'un testament, y trouve ces conditions: mes huit neveux auront portions égales de mon bien; mes deux nieces auront chacune la moitié d'un de mes neveux; mes quatre cousins auront chacun les $\frac{2}{5}$ d'un de mes neveux; mes quatre domestiques auront ensemble autant qu'un de mes cousins, qu'ils partageront en 4 parties égales; ma garde-malade le $\frac{1}{8}$ d'un de mes cousins; les pauvres de la paroisse autant que la garde-malade; & l'exécuteur testamentaire aura 10000ᵗᵗ. Il se trouve dans la succession 565000ᵗᵗ; que revient-il à chacun?

SOLUT. Si on exprime par x la part d'un neveu, on aura 1°. $8x$, part des 8 neveux;

2°. x, part des 2 nieces;

3°. $\frac{8x}{5}$, part des 4 cousins;

4°. $\frac{2x}{5}$, part des 4 domestiques;

5°. $\frac{x}{20}$, part de la garde-malade;

6°. $\frac{x}{20}$, part des pauvres;

7°. 10000ᵗᵗ, part de l'exécuteur testam.

Or

Or toutes ces parts prises ensemble forment la succession ; on aura donc cette équation $8x + x + \frac{8x}{5} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{10} + \frac{x}{20} + 10000 = 565000$ ᵗᵗ; corrigeant l'expression, on aura . . . . . . $11x + \frac{1}{10}x = 555000$ ᵗᵗ ; multipliant par 10, on aura $111x = 5550000$ ᵗᵗ ; divisant par 111, on aura $x = 50000$ ᵗᵗ, part de chaque neveu ; donc chaque niece a 25000 ᵗᵗ, chaque cousin 20000 ᵗᵗ, les 4 domestiques chacun 5000 ᵗᵗ, la garde-malade 2500 ᵗᵗ, & les pauvres 2500 ᵗᵗ. Toutes ces parts jointes ensemble & ajoutées aux 10000 ᵗᵗ de l'exécuteur testamentaire, redonneront les 565000 ᵗᵗ à quoi monte la succession : ce qui prouve que la regle est bien faite. C. Q. F. Dét.

423. PROB. Deux pieces de vin de Perpignan coûtent 1000 ᵗᵗ, rendues à Versailles ; le prix de l'une est au prix de l'autre comme 3 est à 5. Combien coûtent-elles chacune ?

SOLUTION. Soit x le prix de la piece de moindre qualité, & y celui de la plus chere. On aura par l'état de la question $x : y :: 3 : 5$, d'où $x = \frac{3y}{5}$; mais $x + y = 1000$ ᵗᵗ ; donc aussi $y + \frac{3y}{5} = 1000$ ᵗᵗ, d'où $5y + 3y = 5000$ ᵗᵗ, ou $8y = 5000$ ᵗᵗ, d'où $y = \frac{5000}{8} = 625$ ᵗᵗ : prix de la piece de meilleure qualité ; & $x = \frac{3y}{5} = \frac{1875}{5} = 375$ ᵗᵗ, prix de la piece de moindre qualité. C. Q. F. Dét.

424. PROB. On demande à un Gascon si le gibier est bon marché chez lui : sandis, répond-il, vous en allez juger : on a 30 pieces de gibier pour 30 sols, savoir, les lievres à $2^{s}\ 6^{d}$, les

perdrix à $1^f\ 9^d$, & les cailles à 6^d ; voyez combien on en a de chaque espece pour cette somme ?

SOLUTION. J'exprime le prix du lievre par l, celui de la perdrix par p, & le prix de la caille par c, & un sol par m. J'aurai, par l'état de la question, ces 3 équations.

1ere $l - 18^d = m$
2^e $p - 9 = m$
3^e $c + 6 = m$

J'observe que si je multiplie la premiere de ces équations par 6 & la 3e par 18, & que je les ajoute, j'aurai $6l + 18c = 24m$, d'où $3l + 9c = 12m$; de même, si je multiplie la 3e équation par 9 & la 2e par 6, & que je les ajoute, j'aurai $6p + 9c = 15m$; prenant les $\frac{2}{3}$, on aura $4p + 6c = 10m$: de même, si on prend les $\frac{2}{3}$ de l'équation $3l + 9c = 12m$, on aura $2l + 6c = 8m$, ajoutant ensemble les 3 équations $3l + 9c = 12m$; $4p + 6c = 10m$; $2l + 6c = 8m$, on aura $5l + 4p + 21c = 30m = 30^f$, c'est-dire, que pour 30^f on aura 5 lievres, 4 perdrix & 21 cailles. C. Q. F. Dét.

425. PROB. Le passager d'un bac reçoit pour le travail d'une semaine $46^{tt}\ 10^f = 930^f$; une voiture paie 2^f, un cavalier 1^f, & un piéton 6^d ; il arrive que le nombre des voitures est à celui des cavaliers comme 3 est à 7, & que celui des cavaliers est au nombre des piétons comme 5 est à 8. Combien a-t-il passé de voitures, de cavaliers & de piétons ?

SOLUTION. J'exprime par u le nombre des voitures, par c celui des cavaliers, & par p celui des piétons. Suivant l'état de la question, j'ai ces deux analogies,

1°. $u : c :: 3 : 7 :: 3 \times 5 : 7 \times 5 :: 15 : 35$;
2°. $c : p :: 5 : 8 :: 5 \times 7 : 8 \times 7 :: 35 : 56$.

On voit par ces deux analogies que le nombre des voitures étant 15, les cavaliers sont 35, & les piétons 56; mais 15 voitures à 2^f font 30^f.

35 cavaliers à 1^f ... 35
56 piétons à 6^d ... 28

Total 93

Or, le passager a reçu 930^f, au lieu de 93^f; donc autant de fois que 93^f sont contenus dans la recette, autant de fois il a passé 15 voitures, 35 cavaliers & 56 piétons; mais 930 divisé par 93, donne 10 pour quotient. Il est donc passé 150 voitures, 350 cavaliers & 560 piétons. En effet,

150 voitures à 2^f font 300^f;
350 cavaliers à 1^f font 350;
560 piétons à 6^d font 280;

$930^f = 46^{tt}\ 10^f$, recette.

C. Q. F. Dét.

426. PROB. Un débiteur a payé à son créancier 6780^{tt}, tant pour l'intérêt de 8 ans 3 mois, que pour le capital. L'intérêt étoit à 5 pour cent; quel est le capital?

SOLUTION. En suivant l'état de la question, je trouve que 100^{tt} rapporteroient $41^{tt}\ 5^f$ dans 8 ans 3 mois, à 5 p. $\frac{0}{0}$; ainsi j'ai $141^{tt}\ 5^f$ pour capital & intérêt. Je fais ensuite cette analogie, si $141^{tt}\ 5^f$ proviennent d'un capital 100^{tt}, de quel capital proviendront 6780^{tt}? En exprimant ce capital par x, on aura $141^{tt}\ 5^f : 100 :: 6780 : x$; ou si on multiplie les termes du premier rapport

par 4, on aura 565 : 400 : : 6780 : $x = \frac{2712000}{565}$ $= 4800$₶, capital cherché ; en effet, 4800₶ à 5 p. % rapportent 240₶ par an, & 1980₶ dans 8 années 3 mois. Or, 1980₶ + 4800₶ = 6780₶, ſomme rembourſée. Donc, &c. C. Q. F. Dét.

427. PROB. On demande quelle ſomme il faut prêter à 5 p. % pour avoir 2000₶ de rente net, le vingtieme & les 2^{s} pour livre du dixieme étant déduits ?

SOLUTION. J'obſerve que 1000₶ rapportent 50₶, dont le 20e eſt 2₶ 10^{s} ; le dixieme du revenu 50₶ eſt 5₶, dont les 2^{s} pour livre ſont 10^{s} ; il faut donc ôter 2₶ 10^{s} + 10^{s}, ou 3₶ de 50₶ ; le reſte 47₶ eſt le revenu net de 1000₶ à 5 p. %. Cela poſé, je fais cette analogie, ſi 47₶, revenu net, le 20e & les 2^{s} pour livre du dixieme déduits, exigent un fonds de 1000₶, combien un revenu net de 2000₶ exigera-t-il de fonds ? J'exprime ce fonds inconnu par x, & je fais cette analogie, 47 : 1000 : : 2000 : $x =$ 42553₶ 3^{s} 9^{d} $\frac{45}{47}$. Il faut donc placer un fonds de 42553₶ 3^{s} 9^{d} $\frac{45}{47}$ pour avoir 2000₶ de revenu net, le 20e & les 2^{s} pour liv. du dixieme déduits. La preuve en eſt que 42553₶ 3^{s} 9^{d} $\frac{45}{47}$ de capital à 5 p. % rapportent 2127₶ 13^{s} 2^{d} $\frac{14}{47}$ de revenu, ...

dont le 20e eſt . . . . 106₶ 7^{s} 7^{d} $\frac{43}{47}$
& les 2^{s} pour livre du 10e ou le
100e eſt . . . . 21 5 6 $\frac{18}{47}$

le réſultat du 20e & des 2^{s} pour
livre du 10e eſt donc . . . . 127₶ 13^{s} 2^{d} $\frac{14}{47}$

qui étant ôtés de la rente 2127₶ 13^{s} 2^{d} $\frac{14}{47}$, il reſte net 2000₶. C. Q. F. Dét.

428. PROB. Un particulier doit rembourſer 3600₶ en 3 paiemens égaux de 1200₶ chacun,

le premier dans un an, le ſecond dans 2 ans, & le 3e dans 4 ans, ſous condition que ſi on retarde les paiemens, on paiera l'intérêt du retard à 5 pour cent, & que ſi on avance le paiement, on déduira 5 p. $\frac{0}{0}$; on veut s'acquitter dans un ſeul paiement, ſans payer ni déduire d'intérêt; dans quel tems faut-il le faire?

SOLUTION. Pour réſoudre ces ſortes de queſtions, il faut multiplier chaque paiement par le tems où il doit être fait; ajouter les réſultats; on a une ſomme qu'il faut diviſer par la dette totale; le quotient exprime le tems cherché. Dans cet exemple, les produits des paiemens par les tems où ils doivent ſe faire, ſont,

1°. $1200 \times 1^{an} = 1200$
2°. $1200 \times 2 = 2400$
3°. $1200 \times 4 = 4800$

ſomme des prod.	8400	3600 dette.	Diviſeur.
reſte	1200	$2^{ans}\ 4^{mois.}$	Quotient.
mois	14400		
	00000		

qui indique qu'on doit faire ce paiement dans 2 ans 4 mois.

La raiſon en eſt que le retard du premier paiement 1200^tt^ eſt d'un an 4 mois; ce qui fait un revenu de 80^tt^; le ſecond paiement ſouffre un retard de 4 mois; ces 4 mois occaſionnent un intérêt de 20^tt^; ainſi le retard des deux premiers paiemens fait une perte de 100^tt^ pour le créancier; mais le 3e paiement de 1200^tt^ eſt avancé de 20 mois, & rapporte un profit de 100^tt^. Donc le créancier ne gagne ni ne perd en recevant ſon paiement total au bout de 2 ans 4 mois. C. Q. F. Dét.

Pl. 1, fig. 8. 429. PROB. Un Seigneur aveugle a fait conſtruire dans ſon cellier neuf caveaux diſpoſés en quarré. Celui du milieu eſt deſtiné pour les liqueurs, & il en a la clef. Il ordonne à ſon ſommelier de faire diſpoſer dans les 8 caveaux environnans 52 barils de vin de la meilleure qualité, de ſorte qu'il y ait le même nombre de barils dans les 4 caveaux des angles, & que les 4 caveaux intermédiaires contiennent auſſi un même nombre de barils. Ce ſommelier en effet fait placer 3 barils dans chaque angle & dix barils dans les caveaux du milieu. Le Seigneur aveugle compte ſes barils de vin, & en trouve 16 dans chaque rang de 3 caveaux. Enſuite le ſommelier infidele fait enlever quatre barils du cellier; le Seigneur en eſt averti; il vient compter les barils, il en trouve 16 dans chaque rang compoſé de 3 caveaux. Il juge que c'eſt un faux rapport qu'on lui a fait; quelques jours après, il eſt averti que le ſommelier a fait encore enlever 4 barils; il vient les compter, il en trouve encore 16 dans chaque rang; il rentre chez lui perſuadé qu'on a calomnié ſon ſommelier, & l'honore de ſa confiance; cependant ces deux vols exiſtent. Comment le ſommelier a-t-il fait pour tromper ſon maître?

SOLUTION. 1°. Le ſommelier place dans les caveaux des angles 4 barils & 8 dans les caveaux intermédiaires; chaque rang du caveau contient comme dans la premiere poſition, 16 barils, quoiqu'il n'y en ait en tout que 48; 2°. il place 5 barils dans les angles, & 6 dans les caveaux intermédiaires; ce qui donne encore pour chaque 16 barils, malgré qu'il n'y ait plus en tout que 44 barils. C. Q. F. Dét.

On demande si ce sommelier pourroit encore faire enlever 4 barils & disposer 16 barils dans chaque rang de caveaux. On répond, ouï; il n'a qu'à placer 6 barils dans chaque caveau des angles, & 4 barils dans chaque caveau intermédiaire. Le Seigneur trouveroit encore 16 barils dans chaque rang; ce qui suffiroit pour qu'il crût son sommelier honnête homme; il ne lui resteroit cependant que 40 barils de vin dans son cellier. On peut même réduire les barils à 36, en plaçant 7 barils dans les angles, & deux barils dans chaque caveau intermédiaire. L'aveugle en compteroit encore 16 dans chaque rang.

430. PROB. Faire parcourir au cavalier les 64 cases du damier ou du jeu des échecs, sans passer deux fois par la même case.

B ——— A

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	d 62	57	38	25 c	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55 b	52	59	64 N	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

C ——— D

SOLUTION. Parmi les différentes combinaisons qu'on peut faire, celle qui fait partir le cavalier de la case d'un des angles du damier me paroît la plus facile. Dans cet exemple, on fait partir le cavalier de l'angle droit A, comme l'indique la figure. Les cases où les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. jusqu'à 64 sont écrits, désignent la marche successive du cavalier. Il va de la case 1 à la case 2, de la case 2 à la case 3 &c. jusqu'à la case 64, où le cavalier arrive après avoir parcouru toutes les cases du damier.

On voit qu'on pourroit commencer la marche du cavalier par la case N, & finir par la case de l'angle A, où 64 se trouveroit; ce qui donne deux solutions. Comme on peut commencer par chaque angle du damier, ce problême est susceptible de huit solutions, savoir de quatre en commençant par les angles, & de 4 autres, en commençant par les angles du quarré interne N*cdb*, c'est-à-dire, que si on commence par la case B, on finira par *b*, & que si on commence par la case *d*, on finira par l'angle C. C. Q. F. Dét.

431. Ajoutons aux définitions des mesures données au commencement de ce Traité les définitions suivantes, & terminons notre Arithmétique par quelques problêmes utiles au commerce, & en même tems à chaque particulier, quelles que soient les fonctions de son état.

1°. *Les poids.*

Le millier vaut	10	quintaux;
le quintal pese	100 ℔;	
la livre . . .	16	onces ou 2 marcs; le marc pese 4608 grains;
l'once	8	gros;

le gros . . . . . 3 deniers;
le denier . . . . 24 grains. Le grain eſt ce que peſe un grain de bled.

2°. *Titre de l'or.*

Le titre le plus fin, ou celui de l'or le plus pur, eſt . . . . 24 carats;
le carat ſe diviſe en . . . . 32 grains de fin;
24 carats contiennent donc . . . 768 grains de fin.

Le grain de fin d'or équivaut à 6 grains de poids, 768 grains de fin équivalent donc à 4608 grains de poids, qui font le marc.

3°. *Titre de l'argent.*

Le titre le plus fin eſt . . . . . 12 deniers;
le denier ſe diviſe en . . . . . 24 grains;
12 deniers contiennent donc ... 288 grains de fin.

Le grain de fin d'argent équivaut à 16 grains de poids; 288 grains de fin d'argent équivalent donc à 4608 grains de poids, qui font le marc.

DU TITRE DE L'OR ET DE L'ARGENT.

On doit conclure, des définitions ci-deſſus données, 1°. que l'or pur, ſéparé de toutes les parties hétérogenes, eſt de l'or à 24 carats; 2°. que l'argent pur, ſéparé de toute matiere étrangere, eſt de l'argent à 12 deniers de fin. Le denier de fin ſe diviſe en 24 grains; chacun de ces grains vaut $\frac{32}{32}$iemes.

Ainſi lorſqu'on dit d'une maſſe d'or, après l'affinage, c'eſt de l'or à 24 carats; cela indi-

que que c'eſt de l'or ſans mêlange, de l'or pur pouſſé au fin, ou à 24 carats de fin. Si l'on dit que la maſſe d'or en queſtion eſt à 23 carats, cela indique qu'il y a $\frac{1}{24}$ du poids de matiere étrangere dans cette maſſe.

De même, quand on dit d'un lingot d'argent, qu'il eſt à 12 deniers de fin, c'eſt de l'argent pur ſans matiere étrangere. Ainſi un marc d'argent à 11 deniers de fin, indique un marc dont 11 parties ſont d'argent pur, & un douzieme de *remede*, ou de matiere étrangere. Donc un marc d'argent à 11 deniers 12 grains de fin ou 11 deniers & $\frac{1}{2}$ contient

$7^{\text{onces}}\ 5^{\text{gros}}\ 1^{\text{denier}}$ d'argent fin } car $12 : 8 :: 11\frac{1}{2} :$
& 0 . . $2^{\text{gros}}\ 2^{\text{deniers}}$ de remede ; } $7^{\text{on.}}\ 5^{\text{g}}\ 1^{\text{den.}}$, &
$12 : 8 :: \frac{1}{2} : \frac{1}{3}^{\text{on.}} = 2^{\text{gros}}\ 2^{\text{den}}$. C. Q. F. B. R.

432. PROB. Un monnoyeur a 300 marcs d'argent pur, ou à 12 deniers de fin. Il veut fabriquer des écus à 10 deniers de fin ; combien doit-il y ajouter d'alliage ?

SOLUTION. Puiſque de l'argent à 10 deniers de fin indique qu'il y a $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ de matiere étrangere & $\frac{5}{6}$ d'argent pur dans un lingot quelconque, il faut que 300 marcs ne faſſent que les $\frac{5}{6}$ de la maſſe x qu'on cherche ; on aura donc $300 + \frac{1}{6}x = x$, d'où $1800 + x = 6x$, ou $x = \frac{1800}{5} =$ 360 marcs ; il faut donc ajouter 60 marcs d'alliage aux 300 marcs d'argent pur. C. Q. F. Dét.

433. PROB. Un Affineur a un lingot d'argent de 180 marcs à 10 d. de fin ; on lui demande de le rendre à 12 deniers de fin : combien y aura-t-il de déchet ?

SOLUTION. Une maſſe quelconque d'argent à 10 deniers de fin contient $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ d'alliage & $\frac{5}{6}$

d'argent pur ; or le $\frac{1}{6}$ de 180 eſt 30, & les $\frac{5}{6}$ de 180 ſont 150. Il y a donc 30 marcs d'alliage ou de déchet, & 150 marcs d'argent à 12 deniers de fin dans ces 180 marcs à 10 deniers de fin. C. Q. F. Dét.

434. PROB. On ajoute 20 marcs d'alliage avec 100 marcs d'argent de 10 deniers de fin ; on demande le titre du mêlange.

SOLUTION. Il eſt facile de concevoir que plus on ajoutera de matieres étrangeres aux 100 marcs d'argent de 10 deniers de fin, plus le titre du réſultat diminuera ; de ſorte que ſi on ajoute 100 marcs d'alliage ou de matiere étrangere aux 100 marcs d'argent de 10 deniers de fin, on aura une maſſe de 200 marcs de 5 deniers de fin ; car la maſſe 200 marcs du mêlange multipliée par ſon titre inconnu x, doit être égale au produit des 100 marcs par ſon titre 10 deniers de fin. On aura donc cette équation, $200^{m} \times x = 100^{m} \times 10$, d'où $x = \frac{1000}{200} = 5$ deniers de fin. De cette équation, on déduit auſſi cette analogie, $200 : 100 :: 10 : x = 5$ deniers de fin. Ainſi, pour trouver le titre des 120 marcs du mêlange de 100 marcs d'argent de 10 deniers de fin avec 20 marcs de matiere étrangere, on fera cette analogie $120^{m} : 100^{m} :: 10 : x = 8^{d}$ 8 grains de fin, titre du mêlange. C. Q. F. Dét.

435. PROB. Combien 120 marcs d'argent de 8 deniers 8 grains de fin fourniront-ils de marcs de 10 deniers de fin ?

SOLUTION. Si on exprime par x ce nombre de marcs de 10 deniers de fin, on aura cette équation $10^{d} \times x^{m} = 120^{m} \times 8^{d}\,8^{g}$, d'où $10^{d} : 8^{d}\,8^{g} :: 120^{m} : x^{m} = 100$ marcs de 10 deniers de fin. Ainſi 120 marcs d'argent au titre de $8^{g}\,8^{d}$

de fin se réduisent à 100 marcs de 10 deniers de fin. C. Q. F. Dét.

436. PROB. On donne à un Affineur 54 marcs d'or au titre de 21 carats $\frac{16}{32}$, pour en faire de l'or à 23 carats $\frac{8}{32}$. Combien en aura-t-il de marcs?

SOLUTION. Avec un peu d'attention, on reconnoîtra que la masse 54^m d'or multiplié par son titre 21 carats $\frac{16}{32}$, doit donner un résultat égal au produit de la masse x inconnue d'or par son titre 23 carats $\frac{8}{32}$. On aura donc cette équation, $x^m \times 23\frac{8}{32} = 54^m \times 21\frac{16}{32}$, d'où $23^c\frac{8}{32} : 21\frac{16}{32} :: 54^m : x^m =$ 49 marcs 7 onces 3 gros $\frac{27}{31}$ au titre de 23 carats & $\frac{8}{32}$. Ainsi 54 marcs d'or de 21 carats $\frac{16}{32}$ se réduisent à 49 marcs 7 onces 3 gros $\frac{27}{31}$ d'or à 23 carats $\frac{8}{32}$. Il y a donc un déchet de 4 marcs 0^{once} 4^{gros} $\frac{4}{31}$. C. Q. F. Dét.

437. PROB. Un Affineur trouve qu'un gros d'une masse d'argent perd 12 grains; on demande quel est le titre de cet argent?

SOLUTION. Par l'état de la question, 72 grains de cette masse d'argent donnent 60 grains d'argent fin de 12 deniers de fin. Cette question se réduit à celle-ci, on a 60 grains ou 60 marcs d'argent pur de 12 deniers de fin; on y ajoute 12 grains ou 12 marcs d'alliage, trouver le titre de ce mêlange 72 grains ou 72 marcs. On voit que le titre cherché x, multiplié par 72 doit être égal à la masse 60 d'argent pur, multiplié par son titre 12 deniers de fin. On aura donc cette équation, $72^m \times x^d = 60^m \times 12^d$, d'où $72^m : 60^m :: 12^d : x = \frac{720}{72} = 10^d$ de fin. Ainsi la masse que l'Affineur a essayé est de l'argent à 10 deniers de fin. C. Q. F. Dét.

438. PROB. On a 21 marcs 4 onces 4 gros

d'or fin, on demande combien il faut y joindre d'alliage pour en faire de l'or à 14 carats $\frac{12}{32}$.

SOLUTION. Si on exprime par x la masse cherchée & faite des 21 marcs 4 onces 4 gros d'or fin & de l'alliage, il faut que cette masse x, multipliée par le titre demandé 14 carats $\frac{12}{32}$, donne un produit égal à 24, multiplié par l'or pur 21 marcs 4 onces 4 gros. On aura donc cette équation, $14^{c}\frac{12}{32} \times x = 24^{c} \times 21^{m}\ 4^{on.}\ 4^{gros}$, d'où l'on déduit cette analogie $14\frac{12}{32} : 24 :: 21^{m}\ 4^{on.}\ 4^{gros} : x^{m} = 36$ marcs. Il faudra donc ajouter 14 marcs 3 onces 4 gros d'alliage aux 21 marcs 4 onces 4 gros d'or pur pour avoir 36 marcs d'or au titre de 14 carats $\frac{12}{32}$. C. Q. F. Dét.

439. PROB. On propose de faire un mêlange de 3 lingots d'argent de différens titres. Le premier pese 7 marcs de 11 deniers de fin; le second, 6 marcs de 9 deniers de fin, & le troisieme, 15 marcs de 8 denirs 8 grains de fin. On demande, 1°. quel est le titre de ce mêlange 28 marcs; 2°. quel déchet il subira pour en faire de l'argent fin.

SOLUTION. Pour résoudre cette question & ses semblables, il faut, 1°. multiplier le poids de chaque lingot par son titre; 2°. diviser la somme des produits par le poids des lingots, le quotient exprimera le titre du mêlange. Dans cet exemple, la somme des produits est 256, qu'il faut diviser par le poids des lingots 28 marcs; le quotient $9\frac{1}{7}$ désigne que ce mêlange est de l'argent à 9 deniers $\frac{1}{7}$ de fin. C. Q. F. 1°. Dét.

2°. Si on multiplie ces 28 marcs d'argent par son titre $9^{d}\frac{1}{7}$ de fin, & qu'on divise le produit 256 par 12 deniers de fin, on aura la masse réduite; on trouvera 21 marcs $\frac{1}{3}$ d'argent fin, qui,

étant ôtés de 28 marcs, on aura le déchet 6 marcs $\frac{1}{3}$. C. Q. F. 2°. Dét.

440. PROB. On donne à l'Affineur un lingot d'argent de 25 marcs 5 onces 4 gros, au titre de 11 deniers 18 grains; dans chaque marc il y a 360 grains d'or fin. Combien doit-il rendre d'or & d'argent fin?

SOLUTION. Il est clair, 1°. qu'il doit rendre autant de fois 360 grains d'or pur qu'il y a de marcs & de parties de marc dans le lingot; ce qu'on trouvera en multipliant 360 grains par le nombre 25 marcs 5 onces 4 gros, considéré comme abstrait. On aura 9247 grains & $\frac{1}{2}$ d'or fin, ou 2 marcs & 31 grains & demi qui étant ôtés du lingot 25 marcs 5 onces 4 gros, il restera 23 marcs 5 onces 3 gros 40 grains $\frac{1}{2}$ d'argent au titre de 11 deniers 18 grains de fin, qui fourniront 23 marcs 1 once 4 gros 6 grains $\frac{1}{3}$ d'argent fin (435). C. Q. F. Dét.

DU TITRE DES ESPECES COURANTES.

441. LE titre de l'or des louis d'or doit être à 22 carats de fin. On accorde $\frac{1}{4}$ de carat de remede sur le titre. Ainsi ils sont à 21 carats $\frac{3}{4}$ de fin.

Le titre des écus doit être à 11 deniers de fin. Ils ne sont qu'à 10 deniers & 22 grains, parce qu'on admet 2 grains de remede sur le titre.

ESPECES COURANTES EN FRANCE.

Monnoies d'or.

Le double louis d'or vaut 48#
Le louis d'or . . . . 24#
Le demi-louis d'or . . . . 12#

Monnoies d'argent.

L'écu de ſix livres . . . . 6₶
L'écu de trois livres. . . . . . 3₶
La piece de vingt-quatre ſols 1₶ 4ſ
La piece de douze ſols. 12ſ
La piece de ſix ſols 6ſ

Monnoies de cuivre & d'alliage.

La piece de deux ſols ;
La piece d'un ſol ſix deniers ;
Le ſol ; la piece de ſix deniers ;
Le liard, qui vaut trois deniers ;
La piece d'un denier, qni n'eſt plus d'êſage.

Monnoies idéales.

La piſtole qui vaut 10₶
La livre qui vaut 20 ſols.

On tient à Paris & partout le Royaume les écritures en livres, ſols & deniers. On a à Paris 10 jours de faveur pour le paiement des lettres de change, & ces dix jours ne ſe comptent que du lendemain de l'échéance. Il en eſt de même de billets faits *valeur reçue comptant* : les billets faits *valeur reçue en marchandiſe* ont le mois entier.

Valeur d'une livre de France en monnoies étrangeres.

Alicante	5 ſols 8 deniers.
Amſterdam	9ſ communs & 5 fenins.
Anvers	9ſ communs & 6 fenins.
Augsbourg	22 creutzers & 3 fenins.
Avignon	comme en France.
Bâle.	22 creutzers.
Bergame	40ſ de change.
Berlin	6 bon-gros.
Breſlaw	22 creutzers & 2 fenins.

Cadix	4 réaux de vellon.
Conſtantinople	40 aſpres.
Cracovie	22 gros Polonois & 6 fen.
Coppenhague	15 ſchel. Danois & 11 fen.
Dantzick	22 gros Polonois & 6 fen.
Dreſde	6 ſilvers-gros.
Florence	3 ſols & 11 deniers d'or.
Francfort-ſur-le-Mein	22 creutzers & 2 fenins.
Gènes	24 ſols & 8 den. courans.
Genève	26 ſols $\frac{1}{2}$, petite monnoie.
Hambourg	9 ſols lubs de banque.
Konigsberg	22 gros Polonois & 6 fen.
Leipſick	6 ſilvers-gros.
Lisbonne	166 rès & 2 tiers.
Livourne	3 ſols & 11 den. d'or.
Londres	11 deniers ſterlings.
Madrid	4 réaux de vellon.
Meſſine	48 grains.
Milan	26ſ & 3d courans.
Naples	24 grains.
Nuremberg	22 creutzers & 2 p. fen.
Palerme	48 grains.
Petersbourg (St) . . .	19 copiks.
Rome	19 bayoques & 1 quatrino.
Stockholm	24 ſtuvers de cuivre.
Turin	18 ſols & 2 deniers.
Valence en Eſpagne . .	5 ſols 8 deniers.
Varſovie	1 florin & demi.
Veniſe	2 livres.
Vienne	22 creutzers & 2 fenins.

*

DU

DU CHANGE ET DE LA BANQUE.

442. DÉF. POUR ſe former une idée claire du change, il faut être prévenu, 1°. qu'on appelle Banquier, celui qui fait la banque ou le commerce d'argent par le moyen des traites, remiſes d'argent & des lettres de change qu'il fait paſſer de places en places. On voit par-là qu'un banquier doit avoir des correſpondans dans les pays étrangers & villes de commerce pour faire tenir les ſommes qui lui ſont demandées; qu'il doit toujours avoir de l'argent en caiſſe pour acquitter les lettres de change que ſes correſpondans tirent ſur lui, &c. Le Banquier ne déroge point ſur-tout en Angleterre, en Hollande, en Suiſſe & en Italie, où les cadets des plus nobles familles font la banque.

2°. Que le change, en fait de commerce, ſe dit de l'intérêt, de l'eſcompte, du profit que l'on retire des billets de commerce, dont on avance le paiement; du bénéfice accordé par le Roi ou par les différentes Nations aux changeurs, qui prennent des monnoies ou défectueuſes ou étrangeres, ou hors de cours, pour des monnoies courantes dans le pays ou dans le lieu où l'on négocie les papiers de commerce. Le troc ou la négociation de ces papiers contre de l'argent, eſt l'eſpece de change dont il eſt queſtion. Lorſque le prix de ce troc ou de cette négociation eſt au pair, c'eſt-à-dire, lorſqu'on reçoit dans le lieu du paiement autant de poids d'argent & au même titre que l'on en donne par la lettre de change, on regarde cette poſition ou

cette espece d'équilibre comme le pair du change. Mais il est difficile que cet équilibre se rencontre; en effet, les circonstances du commerce, les dettes réciproques des Etats ou des Places, l'abondance ou la rareté relative des monnoies varient à tout moment, & renchérissent par conséquent l'argent ou le billet; d'où il résulte le change de parité & le change de nécessité. *Par exemple*, l'écu de trois livres de France ou de 60 sols à la taille de 16 $\frac{1}{3}$ au marc, du titre de 11 den. de fin, vaut en Hollande, relativement à son titre & à son poids, 54 den. de gros, en supposant le marc d'argent de France évalué à 22 florins 10 sols de gros, qui représentent 900 den. de gros. Ainsi si on reçoit en Hollande 54 den. de gros pour un écu de 60 sols, le change est au pair.

Le change de nécessité est celui qui ne suit point la parité de la valeur intrinseque des monnoies; mais qui reçoit en quelque sorte son prix de l'abondance ou de la rareté des créances respectives des pays commerçans. La valeur de convenance des papiers représentatifs d'une monnoie étrangere dans une place de commerce, constitue ce que les Négocians appellent le *cours du change;* comme ce cours varie & dépend du rapport qui se trouve entre les dettes & les créances réciproques des Etats, on peut regarder le change comme une espece de baromètre, dont les différens mouvemens indiquent de quel côté penche la balance du commerce.

De deux places qui ont une correspondance de commerce établie, l'une donne le prix certain, & l'autre un prix incertain. Paris donne, par exemple, le prix certain à Amsterdam, c'est-à-dire, un écu de change de 60 sols, pour y re-

cevoir un nombre indéterminé de deniers de gros banco.

Paris donne le prix incertain à Hambourg, ou un nombre indéterminé de livres ou de sols pour 100 mark-lubs banco.

Lorsqu'une place donne le prix certain, le change haut indique l'avantage, le change bas le désavantage. *Par exemple*, le pair de notre écu étant avec Amsterdam de 54 deniers de gros, si le change monte à 56 deniers de gros, la France gagne 2 deniers de gros pour un écu de 60 sols; s'il baisse à 53 deniers de gros, la France perd un denier de gros par écu de 60 sols.

De même, la valeur intrinseque du mark-lubs banco de Hambourg est de 1ᵗᵗ 15ˢ 6ᵈ de France: les 100 mark-lubs valent donc 177ᵗᵗ 10ˢ de France. Ainsi le change de Paris avec Hambourg est au pair, lorsque Paris donne 177ᵗᵗ 16ˢ pour 100 mark-lubs de Hambourg. Le change est avantageux, lorsque Paris ne donne que 174ᵗᵗ pour 100 mark-lubs de Hambourg. Il est désavantageux pour Paris, s'il donne 179ᵗᵗ ou plus, pour 100 mark-lubs de Hambourg.

Il en est de même du change de Paris avec les autres places, & des autres places entr'elles, &c. Ces principes entendus, passons au calcul du change.

Change d'Amsterdam sur Paris.

Les écritures se tiennent à Amsterdam en florins, en sols & demi-sols. Le florin vaut 20 sols de gros, le sol de gros 2 deniers de gros, de sorte que le florin vaut 40 deniers de gros; le denier de gros vaut 8 penings.

443. PROB. Un Hollandois qui veut voyager

en France, prend d'un Banquier d'Amſterdam une lettre de change ſur Paris de 3050tt de France. Le change ce jour-là eſt à 56 $\frac{1}{8}$ deniers de gros pour l'écu de 3tt ou de 60 ſols de France. Combien doit-il compter au Banquier, d'argent d'Amſterdam, c'eſt-à-dire, de florins, de ſols & de deniers de gros?

SOLUTION. On voit par l'état de la queſtion, que ce jour-là 3tt de France exigent 56 $\frac{1}{8}$ deniers de gros; on trouvera donc combien de deniers de gros il faudra pour 3050tt par cette analogie, $3^{tt} : 56\frac{1}{8}^{d\ de\ gros} :: 3050^{tt} : x^{d\ de\ gros} = 57060$ deniers de gros $\frac{5}{12}$, qui valent 1426 florins 10^{f} 0^{d} $\frac{5}{12}$ de gros. C. Q. F. Dét.

Change de Paris ſur Amſterdam, qui ſert de preuve.

444. PROB. Le cours du change eſt à 56 $\frac{1}{8}$ deniers de gros pour 3tt de France. On demande combien on aura de livres à Paris, pour une lettre de change priſe à Amſterdam de 1426 florins 10^{f} 0^{d} $\frac{5}{12}$ de gros?

SOLUTION. On fera cette analogie déduite de l'état de la queſtion,

$56\frac{1}{8}^{d\ de\ gros} : 3^{tt} :: 1426$ florins 10^{f} 0^{d} $\frac{5}{12} = 57060$ deniers de gros $\frac{5}{12} : x^{tt}$; d'où $x = \frac{(57060\frac{5}{12}\ den.\ de\ gros)\times 3^{tt}}{56\frac{1}{8}} = 3050^{tt}$. C. Q. F. Dét.

Change de Londres ſur Paris.

Les écritures ſe tiennent à Londres en livres ſterlings, en ſols & deniers ſterlings. La livre ſterling, qui eſt imaginaire, eſt comptée pour 20 ſchelings ou 20 ſols ſterlings, le ſcheling ou le ſol ſterling pour 12 deniers ſterlings. Ainſi la livre ſterling vaut 240 deniers ſterlings. Le pair

de l'écu de France est de 30 deniers $\frac{1}{2}$ sterlings.

445. PROB. Un Anglois prend chez un Banquier de Londres une lettre de change sur Paris de 1200ᵗᵗ sterlings; le cours du change étant à 32 deniers sterlings pour un écu de 3^{tt} de France, combien le banquier de Paris lui doit-il compter d'argent de France?

SOLUTION. Je réduis les 1200 livres sterlings en deniers sterlings, en multipliant 1200 par 240; j'ai 288000 deniers sterl. & je fais cette analogie, $32^{d\ sterl.} : 3^{tt} :: 288000^{d\ sterl.} : x^{tt} = 27000^{tt}$. Le Banquier de Paris doit donc payer 27000^{tt} au porteur de cette lettre de change. C. Q. F. Dét.

446. PROB. Un Seigneur François prend chez un Banquier de Paris une lettre de crédit ou de change sur Londres de 27000^{tt}; le cours du change étant à 32 deniers sterlings pour un écu de 3^{tt}; que lui paiera-t-on à Londres?

SOLUTION. On fera cette analogie,

$3^{tt} : 32^{d\ sterl} :: 27000^{tt} : x^{d.\ sterl} = 288000$ den. sterlings, qui valent 1200 livres sterlings, ou 1142 guinées & 18 schelings, à raison de 21 sols sterlings pour la guinée. C. Q. F. Dét.

Change de Madrid sur Paris.

On tient les écritures à Madrid en réaux de plate nouvelle, dont les 8 forment une piastre courante. Paris donne l'incertain pour le certain à Madrid, c'est-à-dire, que Paris donne de 14 à 16^{tt} de France pour une pistole de 32 réaux d'Espagne. Le pair est de $15^{tt}\ 19^{f}\ 10^{d}\ \frac{3}{5}$ de France pour une pistole.

447. PROB. Un Seigneur Espagnol prend à Madrid une lettre de change sur Paris de 12000^{tt} de France; le change est à $14^{tt}\ 10^{f}$ de France

pour la pistole d'Espagne de 32 réaux; combien ce Seigneur doit-il donner de pistoles au banquier de Madrid?

SOLUTION. Si 14^{tt} 10^{f} de France valent une pistole d'Espagne; combien 12000^{tt} donneront-elles de pistoles d'Espagne? On fera donc cette analogie,

$$14^{tt}\ 10^{f} : 1 :: 12000^{tt} : x^{\text{pistoles}} = \frac{12000 \text{ liv.}}{14 \text{ liv. } 10 \text{ f.}} = \frac{24000}{29} = 820 \text{ pistoles d'Espagne } 22 \text{ réaux } \tfrac{2}{29}.$$

C. Q. F. Dét.

448. PROB. Un ministre d'Espagne charge un particulier d'une négociation secrette, & lui donne une lettre de change sur Paris de 820 pist. d'Espagne 22 réaux $\frac{2}{29}$; le cours du change étant ce jour-là à 14^{tt} 10^{f} de France pour une pistole d'Espagne de 32 réaux; combien le Banquier de Paris doit-il payer au porteur de cette lettre de change?

SOLUTION. On dira, si une pistole vaut 14^{tt} 10^{f} de France, combien vaudront 820 pistoles 22 réaux $\frac{2}{29}$? On voit que la question se réduit à multiplier 14^{tt} 10^{f} par le nombre abstrait, ou considéré comme tel, 820 pist. 22 réaux $\frac{2}{29}$. On trouve pour produit 12000^{tt} que le Banquier de Paris paiera au porteur de la lettre de change.

Change de Livourne sur Paris.

On tient les écritures en piastres de huit réaux. Paris & Lyon changent sur Livourne, & donnent l'incertain pour le certain de Livourne, savoir, 90 à 95 sols de France pour la piastre de 8 réaux de Livourne. Le pair pour cette piastre en argent de France, est de 96 sols 10 deniers $\frac{3}{4}$; le louis de France vaut 4 piastres 19 sols un denier, & l'écu de 6^{tt}

vaut une piastre 4 sols 7 den.; la piastre vaut 20 sols; le sol 12 deniers de son espece; la piastre, monnoie imaginaire, vaut 5 ## 15 ^{f}, monnoie bonne courante à Livourne.

449. PROB. Un Italien veut faire toucher à un particulier de Paris une somme de 2460 ##; combien doit-il donner de piastres au Banquier de Livourne pour avoir une lettre de change sur Paris de 2460 ##, le cours du change ce jour-là étant à 92 ^{f} $\frac{1}{2}$ pour une piastre de Livourne?

SOLUTION. Par l'état de la question, on voit que 92 ^{f} 6 ^{d} = 4 ## 12 ^{f} 6 ^{d} donne une piastre. Il s'agit donc de trouver combien on en aura pour 2460 ##. On fera donc cette analogie, qui se réduit à une division complexe . . . .

4 ## 12 ^{f} 6 ^{d} : 1 ^{piastre} :: 2460 : $x^{piast.}$ = $\frac{2460}{4^{liv.}\ 12^{f.}\ 6^{d.}}$ = $\frac{19680}{37}$ = 531 piastres de Livourne & $\frac{33}{37}$. C. Q. F. Dét.

450. PROB. Un Abbé part de Paris pour voyager en Italie. Il prend à Paris une lettre de change sur Livourne de 531 piastres $\frac{33}{37}$; combien doit-il payer au Banquier en livres de France, le change étant ce jour-là à 92 ^{f} $\frac{1}{2}$ pour une piastre de Livourne?

SOLUTION. Puisqu'une piastre de Livourne exige 92 ^{f} 6 ^{d} = 4 ## 12 ^{f} 6 ^{d}, combien exigeront 531 piastres $\frac{33}{37}$? On voit que la question se réduit à multiplier le nombre concret 4 ## 12 ^{f} 6 ^{d} par l'abstrait 531 $\frac{33}{37}$. On trouvera pour produit 2460 ## de France que cet Abbé doit donner au Banquier de Paris. C. Q. F. Dét.

Change de Rome ſur Paris.

On tient à Rome les écritures en écus monnoie de Bajocs. L'écu monnoie vaut 10 jules ou paules; le jule ou paule 10 bajocs; ainſi l'écu monnoie vaut 100 bajocs. On ne porte ſur les livres que l'écu monnoie & des bajocs ou bayoques: le bayoque vaut $1^{f}\ 0^{d}\ \frac{3}{5}$ *de denier de France: Rome donne un écu monnoie pour environ* 103^{f} *de France. Le pair eſt de* 105^{f} *de France pour un écu monnoie à Rome.*

451. Prob. Le Nonce du Pape, voulant ſe rendre à la Cour de France, prend chez un Banquier de Rome une lettre de change ſur Paris de 6748 écus monnoie; le cours du change ce jour-là eſt à $103^{f}\ 6^{d}$ pour l'écu monnoie Romain; combien ce Prélat recevra-t-il d'argent du Banquier de Paris?

Solution. On voit qu'il doit recevoir autant de fois $103^{f}\ 6^{d}$, ou $5^{tt}\ 3^{f}\ 6^{d}$ qu'il a donné d'écus monnoie au Banquier de Rome, ſavoir, 6748. Il ne s'agit donc que de multiplier $5^{tt}\ 3^{f}\ 6^{d}$ par le nombre abſtrait 6748. Le produit $34770^{tt}\ 18^{f}$ eſt l'argent qu'il touchera à Paris. C. Q. F. Dét.

452. Prob. Un Chevalier François, qui veut aller paſſer quelque tems à Rome, remet à un Banquier de Paris $34770^{tt}\ 18^{f}$ pour une lettre de change ſur Rome; le cours du change étant de $5^{tt}\ 3^{f}\ 6^{d}$ pour un écu monnoie Romain; combien doit-il recevoir à Rome?

Solution. Il recevra autant d'écus monnoie à Rome que $5^{tt}\ 3^{f}\ 6^{d}$ ſont contenus de fois dans $34770^{tt}\ 18^{f}$. En faiſant la diviſion, on trouve 6748 écus monnoie. C. Q. F. Dét.

Change de Lisbonne sur Paris.

On tient à Lisbonne les écritures en rés, dont 400 font la crusade ; Lisbonne donne 460 à 480 rés pour 3^tt de France ; le pair est 458 rés de Portugal pour l'écu de 3^tt de France. Le louis d'or de France de 24^tt vaut 3600 rés ; l'écu de 6^tt de France vaut 976 rés de Portugal.

453. PROB. Un Portugais prend à Lisbonne une lettre de change sur Paris de 2786978 rés ; le cours du change étant ce jour-là à 472 rés pour 3^tt de France ; combien le Banquier de Paris doit-il payer argent de France ?

SOLUTION. On voit par l'état de la question, qu'il n'y a qu'à faire cette analogie,

472 rés : 3^tt :: 2786978^rés : $x^{tt} = \frac{8360934}{472} =$ 17713^tt 16^f 10^d $\frac{176}{472}$. Ainsi le Portugais recevra du Banquier de Paris 17713^tt 16^f 10^d $\frac{176}{472}$. C. Q. F. Dét.

454. PROB. Un Envoyé de France à Lisbonne prend chez un Banquier de Paris une lettre de change sur Lisbonne de 17713^tt 16^f 10^d $\frac{176}{472}$; le cours du change étant de 472 rés de Portugal pour 3^tt de France ; combien l'Envoyé recevra-t-il de rés à Lisbonne ?

SOLUTION. On fera cette analogie, déduite de l'état de la question,

3^tt : 472^rés :: 17713^tt 16^f 10^d $\frac{176}{472}$: $x = \frac{8360934}{3}$ = 2786978 rés. C. Q. F. Dét.

455. On déterminera avec la même facilité le change direct d'une place avec une autre place, toutes les fois qu'on connoîtra le pair du change, ou la valeur intrinseque des especes qui ont cours dans ces places, ou celles dont on fait la tenue des livres dans le change ; & cela par de simples

regles de Trois, souvent même par la multiplication, ou par la division simple ou complexe.

Du Change indirect.

On fera le change indirect avec la même facilité, à l'aide de la regle Conjointe (271). *Par exemple*, un Banquier de Paris est chargé de faire passer 24000^{tt} à l'Ambassadeur de France à Naples. Comme Paris n'a pas de change ouvert avec Naples, il se sert de Livourne. Supposons que le cours du change ce jour-là soit de 95^{s} = 4^{tt} 15^{s} de France pour une piastre de Livourne, & que 100 piastres valent 115 ducats de Naples; on trouvera combien le Banquier de Livourne fera remettre de ducats & de grains à l'Ambassadeur de France par son Correspondant de Naples, à l'aide de cette regle conjointe,

Si 4^{tt} 15^{s} de France . . . . = 1 piast. de Liv.
Si 100 piastres de Livourne . . = 115 duc. de Nap.
Combien x ducats de Naples = 24000^{tt} ?

d'où l'on déduit (271) 4^{tt} 15^{s} × 100 × x = 115 × 24000, ou 475 x = 2760000, d'où x = 5810 ducats 52 grains $\frac{12}{19}$. L'Ambassadeur recevra donc du Banquier de Naples 5810 ducats 52 grains $\frac{12}{19}$. C.Q.F. Dét.

456. Un Seigneur Napolitain, qui se propose de venir passer quelque tems à Paris, se procure d'un Banquier de Naples une lettre de change de 5810 ducats 52 grains $\frac{12}{19}$ par son Correspondant de Livourne sur Paris; le cours du change étant ce jour-là de 115 ducats pour 100 piastres de Livourne & d'une piastre de Livourne pour 4^{tt} 15^{s} de France; combien le Banquier de Paris doit-il payer à ce Seigneur Napolitain?

SOLUTION. On fera cette regle Conjointe,

115 ducats de Naples = 100 piast. de Livour.
1 piastre de Livourne = 4^{tt} 15^{f} de France,
Combien x^{tt} de France = 5810 duc. 52 gr. $\frac{12}{19}$ de Naples ?

D'où $115x = 100 \times 4^{tt}\ 15^{f} \times 5810$ ducats 52 grains $\frac{12}{19}$, ou $115x = 2760000$, d'où $x = \frac{2760000}{115} = 24000^{tt}$. Le Seigneur Napolitain recevra donc à Paris 24000^{tt}. C'est la preuve du problême précédent. On invite les Commençans à faire les multiplications complexes indiquées, de même que les divisions, pour se rendre le calcul familier. C. Q. F. Dét.

457. Dans ce qu'on vient de dire sur un change direct & indirect, on n'a point fait mention des droits du Banquier, de ce qu'il exige pour la négociation; cela dépend du plus ou du moins de fonds qu'il a dans les places sur lesquelles on lui demande des lettres de change, ainsi que du plus ou du moins d'avidité qu'il a pour s'enrichir. A Paris, il prend ordinairement $\frac{1}{2}$ pour 100 pour l'intérieur du Royaume; souvent il ne prend rien, si la lettre qu'on lui demande est à un mois de terme ou plus, sur-tout s'il est en avance avec son correspondant.

Il est bon, relativement à la banque, de faire connoître la forme d'un compte de retour d'un billet protesté & payé par intervention.

Compte de retour d'un billet tiré de Dijon par Paul sur Pierre, à la date du 1er Juin 1780, protesté faute de paiement, & payé par intervention pour l'honneur de la signature de Simon, l'un des endosseurs. A Paris, ce 4 Juin 1780.

Capital du billet	1200 ₶	
frais de protêt & intervention	3	4 ſ.
provision $\frac{1}{2}$ p. $\frac{o}{o}$	6	
perte de négociation 1 p. $\frac{o}{o}$	12	
courtage $\frac{1}{8}$ p. $\frac{o}{o}$	1	10
Certificat d'Agent de change $\frac{1}{8}$ p. $\frac{o}{o}$ . .	1	10
port de lettre double	1	4
Montant	1225 ₶	8 ſ.

qu'il vous plaira acquitter à l'ordre de M. Germain, sans autre avis de

Votre très-humble & très-obéissant serviteur, FABIER.

A Messieurs,
Messieurs Simon & Compagnie,
Négocians, à Lyon.

Sur cette même feuille doit être le certificat de l'Agent de change, qui atteste avoir négocié à 1 p. $\frac{o}{o}$ de perte.

Après avoir parlé du rapport de la monnoie de France avec les monnoies étrangeres, je vais exposer, en faveur des négocians, celui des mesures ou poids de Paris avec ceux de différentes villes, tant du royaume que des pays étrangers, & donner différens exemples des applications qu'on peut en faire aux spéculations du commerce.

458. TABLE du rapport de 100 aunes de Paris avec les mesures qui sont en usage dans les places suivantes.

L'aune de Paris est de 3 pieds 7 pouces 8 lignes ; le pied vaut 12 pouces ; le pouce 12 lignes du pied de Roi ; ainsi l'aune de Paris est de 524 lignes.

100 aunes de Paris font,	Noms des mesures.	Noms des Places.
173 $\frac{1}{2}$	aunes	Amsterdam.
171 $\frac{3}{4}$	aunes	Anvers.
100	aunes	Arrau,
209 $\frac{1}{2}$	braches	audit Arrau.
208 $\frac{3}{4}$	aunes	Auguste.
60	cannes	Avignon.
72 $\frac{3}{4}$	cannes	Barcelone.
208 $\frac{3}{4}$	aunes	Basle.
178 $\frac{1}{4}$	brasses	Bergame.
216 $\frac{2}{3}$	braches	Bernes.
185 $\frac{3}{4}$	brasses pour les étamines	Bologne.
229	brasses dites crêpes..	audit Bologne.
217 $\frac{1}{4}$	aunes	Breslau.
100	aunes	Brouck.
209 $\frac{1}{2}$	braches	audit Brouck.
171 $\frac{3}{4}$	aunes	Bruxelles.
138 $\frac{3}{4}$	varres	Cadix.
159 $\frac{1}{2}$	aunes	Cambrai.
208 $\frac{1}{4}$	aunes	Cologne.
178	pics	Constantinople.
194 $\frac{3}{4}$	aunes	Coppenhague.
210 $\frac{1}{4}$	aunes	Dantzick.
130	verges	Dublin.
130	verges	Edimbourg.
49 $\frac{1}{4}$	cannes	Florence.

100 aunes de Paris font,	Noms des mesures.	Noms des Places.
199	brasses	audit Florence.
208 ¾	aunes	Francfort.
149 ½	aunes pour les toiles	Saint-Gall.
194 ¼	*Idem* laines . . .	aud. Saint-Gall.
53	cannes pour les draps	Gênes,
59 ½	*Idem* toiles . . .	audit Gênes.
204 ½	brasses, soieries . .	audit Gênes.
476 ¼	palm. de Hollande . .	audit Gênes.
104	aunes pour les toiles en détail	Genève.
100	aunes pour les draps & toiles en gros . .	audit Genève.
208 ¾	aunes	Hambourg.
208 ½	aunes	Konigsberg.
208 ¼	aunes	Leipsick.
100	aunes	Lentsbourg.
190 ½	braches	aud. Lentsb.
216 ¼	aunes	Liege.
167 ¼	aunes	Lille.
105 ¼	barres	Lisbonne.
173 ½	cav.dos	aud. Lisbonne.
49 ¾	cannes	Livourne.
199	brasses	aud. Livourne.
130	verges	Londres.
100	aunes	aud. Londres.
111 ½	aunes	Lausanne.
102 ½	aunes, rapport . .	Lyon.
101	par l'usage . . .	audit Lyon.
138 ¾	varres	Madrid.
174 ¼	aunes	Malines.
60	cannes	Marseille.
100	aunes	aud. Marseille.
59	cannes	Messine.
177	brasses pour les laines	Milan.
222 ¾	pour les soieries . .	audit Milan.
60	cannes	Montpellier.

100 aunes de Paris font,	Noms des mesures.	Noms des Places.
100	aunes	aud. Montpell.
85 ¼	aunes	Nantes.
101 ½	aunes	Naples,
53 ¾	cannes	audit Naples.
107	aunes	Neufchâtel.
173 ½	aunes	Nuremberg.
175 ½	aunes	Osnabruck.
59	cannes	Palerme.
173 ½	cannes pour les draps.	Rome,
54 ¼	cannes p^{r} les toileries.	audit Rome.
175	pics	Smyrne.
199	aunes	Stockholm.
208	aunes	Schwitz.
66 ½	cannes	Toulouse,
100	aunes	audit Toulouse.
197 ½	ras	Turin.
128 ¾	barres	Valence.
178	brasses pour les draperies	Venise.
190 ½	brasses pour les étoff. d'or, d'arg. toiles	Venise.
100	aunes p. les draperies	Vevay.
106 ⅔	aunes pour les toiles	audit Vevay.
208	aunes	Underval.
60	cannes	Uzès.
190	aunes	audit Uzès.
100	aunes	Zoffingue.
209 ½	braches	aud. Zoffingue.
100	aunes, ...	Zurich.
190 ½	braches	audit Zurich.

459. **Prob.** Déterminer combien 200 aunes d'Amsterdam valent d'aunes de Paris.

Solution. On voit par cette table que 173$^{au.}$ ½ d'Amsterdam valent 100 aunes de Paris. On

fera donc cette analogie $173\frac{1}{2} : 100 :: 200^{au.} : x = 115^{au.}\frac{1}{2}$ environ de Paris. C. Q. F. Dét.

460. PROB. Combien 100 aunes d'Amſterdam font-elles de cannes d'Avignon ?

SOLUTION. On ſait que $173^{au.}\frac{1}{2}$ d'Amſterdam valent 100 aunes de Paris, & que 100 aunes de Paris valent 60 cannes d'Avignon ; on fera donc cette regle conjointe,

$173^{au.}\frac{1}{2}$ Amſt. = 100 aunes de Paris ;
$100^{au.}$ de Paris = 60 cannes d'Avignon ;
x cannes d'Av. = 100 aunes d'Amſterdam,

d'où (271) $173\frac{1}{2} \times 100 \times x = 100 \times 60 \times 100$

d'où $173\frac{1}{2} \times x = 100 \times 60$, d'où $x = \frac{6000}{173\frac{1}{2}} = 34$ cannes d'Avignon, & $\frac{202}{347}$, ou ſimplement 34 cannes $\frac{1}{2}$ d'Avignon ; ainſi des autres. C. Q. F. Dét.

461. PROB. Déterminer à l'aide de la table du nº. 458 combien 835 aunes de Francfort valent de verges d'Edimbourg.

SOLUTION. Si l'on fait attention qu'on trouve dans la table que 100 aunes de Paris valent $208\frac{3}{4}$ aunes de Francfort, & que ces mêmes 100 aunes de Paris valent 130 verges d'Edimbourg, on conclura que $208\frac{3}{4}$ aunes de Francfort valent 130 verges d'Edimbourg. On trouvera donc par une ſimple regle de Trois directe combien 835 aunes de Francfort valent de verges d'Edimbourg, en diſant, $208\frac{3}{4} : 130 :: 835 : x = 520$ verges d'Edimbourg. On n'a donc pas beſoin de recourir à la regle Conjointe pour réſoudre ces ſortes de queſtions. C. Q. F. Dét. & B. R.

462. *TABLE du rapport de 100 livres pesant de Paris avec les poids des Places ci-après.*

La livre de Paris est composée de 16 onces poids de marc ; l'once de 8 gros ; le gros de 3 deniers ; le denier de 24 grains : ainsi la livre est de 9216 grains.

100 livres de Paris font,	Suite.
100 ℔ ... Amsterdam.	155 ¾ bal. lég. aud. Gênes.
105 ½ ... Anvers.	88 ¾ ... Genève.
102 ½ ... Arau.	102 ... Hambourg.
103 ... Auguste.	125 ... Konigsberg.
120 ... Avignon.	99 ... la Rochelle.
100 ... Basse.	105 ... Leipsick
169 ½ p. subtil. Bergame.	94 .. Lentsbourg.
68 grand poids audit.	105 ... Liege.
98 ... Berne.	114 ... Lille.
100 ... Besançon.	113 ½ ... Lisbonne.
151 ½ ... Bologne.	114 ¼ poids lég. Livourne.
125 ... Breslau.	95 gros poids aud. Liv.
105 ... Bruxelles.	109 quintal 112 Londres.
107 ... Cadix.	116 poids de ville Lyon.
104 ... Cologne.	106 ⅔ poids de soie aud.
87 ... Constantinople.	114 ... Madrid.
101 ¼ .. Coppenhague.	105 ... Malines.
112 ½ ... Dantzick.	123 ½ ... Marseille.
97 ... Dublin.	120 poids courant audit.
144 ¼ ... Florence.	154 poids lég. Messine.
97 ... Edimbourg.	79 ¼ gros poids audit.
98 ... Francfort.	168 ... Milan
98 ... Saint-Gall	120 ... Montpellier.
90 ¼ gros poids à Gênes.	99 ... Nantes.
100 poids caisse aud. Gên.	169 ½ poids subtil Naples.
144 grosse balance aud.	68 gros poids Naples.

100 livres de Paris font,	Suite.
94 ½ ... Neuchâtel.	117 ... Stockholm.
96 ... Nuremberg.	118 ... Toulouse.
154 poids lég. Palerme.	133 ½ ... Turin.
70 ¾ gros poids audit.	158 ½ ... Valence.
140 ... Rome.	164 ½ p. subtil. Venise.
100 .. Rotterdam.	104 gros poids aud. Ven.
100 p. de marc Rouen.	102 ½ ... Zoffingue.
96 p. de Vicomté aud.	93 ½ ... à Zurich &
87 ... rottes. Smyrne.	à Zurzach.

463. PROB. Déterminer 1°. combien 456 ¾ livres de Constantinople valent de livres de Paris.

2°. Combien 572 livres de Cologne valent de livres de Francfort.

SOLUTION. 1°. Puisqu'on trouve dans la table que 100 livres de Paris valent 87 livres de Constantinople, on fera cette analogie,

87 : 100 : : 456 ¾ : x = 525 livres ; ce qui fait voir que 456 livres ¾ de Constantinople valent 525 livres de Paris. C. Q. F. 1°. Dét.

2°. Puisque 100 livres de Paris valent 104 livres de Cologne & 98 livres de Francfort, il faut que 104 livres de Cologne valent 98 livres de Francfort. On trouvera combien les 572 livres de Cologne valent de livres de Francfort par cette analogie,

104 : 98 : : 572 : x = 539 livres de Francfort ; ainsi des autres. C. Q. F. 2°. Dét.

464. *TABLE du rapport du setier de grains de Paris, pesant 240 livres, avec les différentes mesures des Places de commerce ci-après.*

Le muid de bled de Paris pese 2880 lb, & contient 12 setiers chacun de 240 lb, poids de marc, de 16 onces chaque livre;
Le setier est composé de 2 mines de 120 lb;
La mine de 2 minots, chacun de 60 lb;
Le minot de 3 boisseaux, chacun de 20 lb;
Le boisseau de 4 quarts chacun de 5 lb;
Le quart de 4 litrons, chacun de 1 lb $\frac{1}{4}$;
Le litron contient 36 pouces cubes.

Setiers de Paris.	Nombre des mesures de chaque place.		Poids d'une mesure.
5 set. font	6 setiers ..	d'Abbeville.	200 lb
42 $\frac{2}{3}$ . . .	100 setiers. ..	Agde	104
19 . . .	33 $\frac{1}{2}$ sacs ..	Agen	136
165 . . .	100 cahis ..	Alicante . . .	
19 . .	25 septiers ..	Albi	182
1 . .	14 boisseaux	Amboise . .	17
1 . .	4 $\frac{2}{3}$ setiers ..	Amiens . . .	51
19 . .	1 last ..	Amsterdam	4560
19 . .	32 $\frac{1}{3}$ viertels	Anvers . . .	141
1 . .	9 $\frac{1}{2}$ boiss. ..	Arnay le Duc	25
1 . .	5 boisseaux	Auheterre,.	48
1 . .	4 boisseaux	Aurai	60
2 $\frac{1}{2}$ . . .	1 émine ..	Auxonne . .	640
48 un peu moins..	100 carteres	Barcelone ..	150
1 . .	3 $\frac{1}{6}$ mines ..	Baugency ..	75
19 . .	36 sacs ..	Bayonne . .	126
12 $\frac{2}{3}$ . .	1 tonneau	Beauvais . .	3040

Setiers de Paris.	Noms des mesures de chaque place.		Poids d'une mesure.
1 1/3 ..	1 bichet ..	Bellegarde ..	320 lb
3 1/4 ..	une pipe . .	Bergerac . .	840
1 ..	6 1/6 mesures	Besançon ...	35
43 2/3 ..	100 setiers . .	Beziers . . .	104
1 ..	20 boisseaux	Blois	12
9 ..	8 setiers . .	Boulogne . .	270
19 ..	38 boisseaux	Bordeaux . .	120
1 1/3 ..	une quartal	Bourg	320
19 ..	32 1/2 viertels.	Bréda	136
437 ..	24 lasts . .	Brême	4370
9 ..	1 tonneau	Brest	2160
1 ..	11 carses . .	Briare	21
19 ..	33 1/3 sacs . .	Cadillac . . .	136
19 ..	50 fanegas ..	Cadix	91
19 ..	100 quartes ...	Cahors	45
13 ..	12 setiers ...	Calais	260
19 ..	35 setiers ..	Carcassonne .	130
54 ..	100 sacs ...	Castelgeloux .	129
3 1/4 ..	une pipe . .	Castelmoron .	840
19 ..	41 1/2 setiers,	Castelnaudary	109
75 ..	100 setiers ,.	Castres . . .	180
43 2/3 ..	100 setiers ..	Cette	104
6 ..	5 bichets ..	Châlons Saôn.	288
1 ..	8 boisseaux	La Charité . .	30
1 ..	7 boisseaux	Charlieu . . .	34
1 ..	6 1/3 boiss.	Charolles . .	37
1 ..	7 boisseaux	Châteauneuf-sur-Loir . .	34
19 ..	34 1/2 sacs . .	Clerac	132
19 ..	41 sacs . .	Condom . . .	111
19 ..	42 tonnes ..	Coppenhague	108
1 ..	3 1/3 sacs . .	Corbie	65
19 ..	un last . .	Dantzick . .	4560
19 ..	36 muddes .	Deventer . .	126
12 ..	18 mines ..	Dieppe . . .	160
19 ..	30 1/2 rasieres	Dixmude . .	149

Setiers de Paris.	Nombre des mesures de chaque place.		Poids d'une mesure.
19 . .	$10\frac{1}{4}$ quarteau	Dublin . . .	444
19 . .	18 rasieres	Dunkerque . .	253
19 . .	$10\frac{1}{4}$ quarteau	Edimbourg .	444
19 . .	40 sacs . .	Flessingue . .	114
19 . .	$28\frac{1}{2}$ sacs . .	Fronsac	160
67 . .	100 sacs . .	Fronton . . .	160
19 . .	21 setiers . .	Gaillac	217
19 . .	56 halsters	Gand	81
$82\frac{1}{2}$ . .	100 émines	Gènes	198
81 . .	160 coupes	Genève	$121\frac{1}{2}$
1 . .	$9\frac{3}{5}$ carses	Gierfort	25
19 . .	22 rasieres	Gravelines . .	207
247 . .	12 lasts . .	Hambourg . .	4940
19 . .	38 sacs . .	Harlem. Holl.	120
1 . .	$5\frac{1}{4}$ boiss.	Havre de Grace.	45
12 . .	un tonneau	Hennebon . . .	2280
19 . .	un last . .	Konigsberg . .	4560
10 . .	un tonneau	Lanion	2400
9 . .	un tonneau	La Rochelle . .	2160
19 . .	21 setiers . .	Lavour	217
19 . .	35 sacs . .	Libourne . . .	130
19 . .	96 setiers .	Liege	47
19 . .	38 rasieres	Lille	120
19 . .	216 alquières	Lisbonne . . .	21
1 . .	2 sacs . .	Livourne . . .	120
19 set.	95 chepels	Lubeck	48
19 . .	$10\frac{1}{4}$ quartiers	Londres . .	444
19 . .	27 muddes	Louvain	168
5 . .	4 ânées . .	Lyon	300
5 . .	3 ânées . .	Mâcon	400
$39\frac{1}{2}$ . .	100 fanegas	Malaga	95
19 . .	$34\frac{1}{2}$ viertels	Malines	132
9 . .	un tonneau	Marans	2160
$109\frac{1}{2}$ . .	100 charges	Marseille . . .	262
19 . .	$41\frac{1}{2}$ sacs . .	Middelbourg .	109

Setiers de Paris.	Nombre des mesures de chaque place.		Poids d'une mesure.
57 ..	100 boiss.	Mirebeau ...	136
19 ..	30 sacs ..	Moissac	152
62 $\frac{1}{2}$ ..	100 sacs ..	Montauban ..	150
1 ..	3 setiers ..	Montpellier ..	80
9 $\frac{1}{2}$ ..	un tonneau	Morlaix	2280
9 $\frac{1}{3}$ ..	un tonneau	Nantes	2240
1 ..	3 tomolis	Naples .... La Pouille .... La Calabre ..	80
48 un peu moins..	100 setiers ..	Narbonne ...	115
19 ..	33 $\frac{1}{3}$ sacs ..	Nerac	136
1 ..	8 boiss.	Nevers	30
27 $\frac{2}{3}$ ..	100 staras ..	Nice. Comté ..	66
19 ..	17 $\frac{1}{2}$ rasieres	Nieuport ...	260
19 ..	21 $\frac{3}{4}$ mouvers	Nimegue ...	209
2 $\frac{1}{2}$ ..	un muid ..	Orléans	600
1 ..	5 boisseaux	Périgueux ...	48
165 ..	100 minettes	Piémont	396
12 $\frac{1}{4}$ ..	un tonneau ..	Port Louis ..	2940
9 $\frac{1}{2}$ ..	un tonneau	Quibron ...	2280
12 $\frac{1}{4}$ ..	un tonneau	Quimperlay ..	2940
19 ..	17 setiers ..	Rabastens ...	268
20 $\frac{2}{3}$ ..	25 setiers ..	Réalmont ...	198
19 ..	25 sacs ..	Réalville ...	182
9 $\frac{2}{3}$ ..	un tonneau	Redon. Bretag.	2320
9 $\frac{1}{2}$ ..	un tonneau	Rennes	2280
19 ..	46 loopens	Riga	99
19 .	29 sacs ..	Rotterdam ...	157
1 ..	8 boisseaux	Rouane	30
7 ..	6 setiers	Rouen	280
19 ..	29 quartiere	Royan	157
3 ..	une émine ..	S. J. de Laune	720
10 ..	un tonneau	Saint-Brieux ..	2400
9 $\frac{1}{2}$ ..	un tonneau	Saint-Malo ..	2280
19 ..	22 $\frac{1}{2}$ rasieres	Saint Omer ..	202

Setiers de Paris.	Noms des mesures de chaque place.		Poids d'une mesure
1 setier	1 setier ..	Saint-Valery ..	240 lb
1 ..	3 esteriaux	Sardaigne ...	80
1 ..	1 setier ..	Saumur	240
57 moins	100 muids ..	Schaffouse ..	136 $\frac{1}{4}$
19 ..	50 fanegas	Seville	91
1 ..	1 $\frac{3}{4}$ salmes	Sicile	137
1 ..	1 $\frac{1}{2}$ resal ..	Strasbourg ..	160
19 ..	23 tonnes	Stockholm ..	198
1 ..	9 $\frac{3}{5}$ carses	Sully	25
3 ..	5 sacs ..	Talmont ...	144
19 ..	15 muddes	Tongres ...	304
49 ..	100 sacs ..	Tonniens ...	117
114 $\frac{1}{4}$ ..	100 charges	Toulon	275
19 ...	26 setiers	Toulouse	175
1 ...	3 $\frac{13}{16}$ quart.	Vauvillon ...	63
12 ..	25 sacs ..	Tournon	115
1 $\frac{3}{5}$ ..	un bichet ..	Tournus	384
1 ..	14 boiss.	Tours	17
2 $\frac{1}{3}$ ..	un cassis ..	Tunis	560
62 $\frac{1}{2}$ ..	100 sacs ..	Valence	150
139 $\frac{3}{4}$ ..	100 cassis ..	Valence, Esp.	335
10 ..	un tonneau	Vanes	2400
1 ..	2 staros ..	Venise	120
1 $\frac{1}{4}$ ..	1 bichet ..	Verdun	300
1 ...	4 quartes	Vésoul	60
19 ...	25 muddes	Utrecht	182
1 ...	6 émines	Blamont ...	40
1 ...	5 $\frac{5}{9}$ émines	Belfort	43
1 ...	1 $\frac{1}{2}$ resal ..	Colmar	160
1 ...	8 $\frac{8}{9}$ émines	Dijon	27
1 ...	4 émines	Dole	60
1 ..	6 mesures	Gray	40
1 ..	3 $\frac{5}{12}$ quart	Favernay ...	70
1 ..	6 émines	Héricourt ...	40
1 ..	3 $\frac{5}{12}$ quart.	Luxeuil	70
1 ..	4 émines	Pontarlier ...	60

Setiers de Paris.	Nombre des mesures de chaque place.		Poids d'une mesure.
1 . .	6 émines	Montbelliard . .	40
1 . .	4 quartes	Port sur Saône	60
1 . .	3 $\frac{1}{11}$ quart.	Saint-Loup . . .	70
1 . .	4 émines	Salins	60
1 . .	5 $\frac{1}{3}$ émines	Villers-le-Sec . .	45
1 . .	1 $\frac{11}{14}$ resal	Haguenau . . .	165
1 . .	1 $\frac{4}{9}$ *idem* . .	Fort Louis . .	161
1 . .	1 $\frac{3}{8}$ maldre	Landau	174
1 . .	1 $\frac{4}{9}$ resal . .	Huningue . . .	163
1 . .	1 $\frac{3}{8}$ émines	Langres	148
1 . .	1 $\frac{3}{8}$ resal . .	Nancy	174
1 . .	2 $\frac{4}{9}$ quartes	Metz	93

465. PROB. Déterminer, 1°. combien 178 ânées de Lyon font de setiers de Paris.

2°. Combien 150 muids de bled d'Orléans valent de lasts d'Amsterdam.

SOLUTION. 1°. On trouve dans la table que 4 ânées de Lyon valent 5 setiers de Paris. On fera donc cette analogie,

4 : 5 :: 178 : x = 222 setiers $\frac{1}{2}$. En effet, l'ânée pese 300 livres. Les 178 pesent 53400 lb. Le setier de Paris pese 240 lb; les 222 $\frac{1}{2}$ pesent donc 53400 lb. C. Q. F. 1°. Dét.

2°. On trouve dans la table qu'un last d'Amsterdam vaut 19 setiers de Paris; que 2 $\frac{1}{2}$ setiers de Paris valent un muid d'Orléans. On trouvera combien les 150 muids d'Orléans valent de lasts d'Amsterdam par cette regle conjointe (271),

1 last = 19 set.
2 $\frac{1}{2}$ set. = 1 muid;
150 muids = x last d'Amsterdam;

multipliant ces équations & corrigeant, on aura,

$19x = 150 \times 2\frac{1}{2} = 375$; d'où $x = 19\frac{14}{19}$ lasts d'Amsterdam. En effet, 150 muids pesent 90000 ℔, & 19 lasts $\frac{14}{19}$ pesent aussi 90000 ℔. Ainsi des autres. C. Q. F. 2°. Dét.

Autre exemple.

Combien 300 setiers de Rouen font-ils de tonneaux de Vannes ?

On trouve dans la table . . . .

1 ton. . . . = 10 set. de Paris,

7 set. Paris = 6 set. Rouen ,

300 set. . . . = x tonneaux de Vannes ;

d'où $60x = 2100$, d'où $x = 35$ tonneaux de Vannes. En effet, 35 tonneaux pesent 84000 ℔, 300 set. de Rouen pesent aussi 84000 ℔. C. Q. F. Dét.

466. PROB. Lorsque le bled vaut 24₶ le setier, on a 12 livres de pain pour 30 sols ; lorsque le bled vaudra 38₶, combien couteront 10 livres de pain ?

SOLUTION. On voit par l'état de la question que le prix 24₶ du setier de bled, & les 12 livres de pain, sont la cause de la dépense 30 sols, & que le prix 38₶ du setier, & 10 livres de pain sont la cause de la dépense qu'on cherche. Il faut donc faire cette analogie ou regle de Trois,

$24 \times 12 : 30 :: 38 \times 10 : x = \frac{11400}{1760} =$ $39^{f}\ 6^{d}$ prix de dix livres de pain, lorsque le setier de bled vaudra 38₶. C. Q. F. Dét.

467. PROB. Lorsque le setier de bled vaut 38₶ on a 10 livres de pain pour $39^{f}\ 7^{d}$; lorsque le setier de bled ne vaudra que 24₶, combien aura-t-on de pain pour 30 sols ?

SOLUTION. J'observe que par l'état de la question le prix 38₶ du setier de bled, & les 10 livres

de pain sont la cause de la dépense 39ˢ 7ᵈ, & que le prix 24ᵗᵗ du setier, & la quantité de pain qu'on cherche sont la cause de la dépense 30 sols; il faut donc faire cette analogie,

$38 \times 10 ; 39^{s}\ 7^{d} :: 24 \times x^{\text{pain}} : 30$; mais dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens ; on aura donc $39^{s}\ 7^{d} \times 24 \times x = 38 \times 10 \times 30 = 11400$, ou $288x = 11400$, d'où $x = \frac{11400}{288} = 12$ livres de pain qu'on aura pour 30 sols, lorsque le setier de bled sera à 24ᵗᵗ ; c'est la preuve du problême précédent. C. Q. F. Dét.

468. PROB. Lorsque la mesure du bled vaut 5ᵗᵗ = 100 sols, la livre de pain coûte 3ˢ 4ᵈ; combien coûtera la livre de pain, lorsque la mesure de bled ne vaudra que 3ᵗᵗ 15ˢ = 75ˢ.

SOLUTION. On voit par l'état de cette question que plus la mesure du bled est chere, plus la livre de pain doit coûter. On fera donc cette analogie,

$100^{s} : 3^{s}\ 4^{d} :: 75^{s} : x = 2^{s}\ 6^{d}$ valeur de la livre de pain, lorsque la mesure de bled coûtera 3ᵗᵗ 15ˢ. C. Q. F. Dét.

469. PRINCIPE. Pour faire les spéculations en marchandises, il faut savoir, 1°. le rapport que le poids ou la mesure de la ville d'où l'on veut tirer les marchandises, a avec le poids ou la mesure de la ville pour laquelle on les destine; 2°. le prix de l'achat ; 3°. le prix du change auquel on peut payer ; 4°. les frais jusqu'en magasin ; 5°. enfin le prix auquel on peut vendre ces marchandises pour le comparer avec celui auquel elles reviendroient, & juger par-là si la spéculation est avantageuse ou non.

470. APPLICATION. Un Négociant de Paris

auquel on écrit de Cadix, qu'on pourroit avoir la cochenille à 80 ducats de 11 réaux, l'arobe qui pese 26 livres & demie de Paris, veut savoir à combien lui reviendra la livre, s'il en fait les fonds à 15# la pistole, & s'il y a 20# pour cent de frais. Il doit faire la regle conjointe ci-dessous,

26 ℔ $\frac{1}{2}$ de Paris	=	1 arobe,
1 arobe coûte ou	=	80 ducats,
1 ducat vaut ou	=	11 réaux,
32 réaux valent ou	=	1 pist. de change,
1 pist. de change vaut ou	=	15# arg. de Fran.
100# sans frais valent ou	=	120# y compris les frais,
combien de x# coûtera . .		1 ℔ de Paris de coch.

Si l'on forme une équation de toutes ces égalités, on aura (271) $26\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 32 \times 1 \times 100 \times x = 1 \times 80 \times 11 \times 1 \times 15 \times 120 \times 1$; corrigeant & divisant par 3200, on aura . . . . $26\frac{1}{2} \times 1 \times x = 11 \times 15 \times 3 = 495$, d'où $x = \frac{495}{26\frac{1}{2}} = \frac{990}{53}$, d'où $x = 18$# 13^s 7^d $\frac{1}{53}$, c'est-à-dire, que la livre de cochenille reviendra, rendue dans le magasin à Paris, à 18# 13^s 7^d $\frac{1}{53}$. Ainsi si le Négociant de Paris trouve le débit de cette cochenille à 19, à 20# la livre, ou plus, il pourra en faire emplette. C. Q. F. Dét.

472. AUTRE APPLICATION. Un Négociant de Lyon à qui on donne le même avis, veut savoir à combien la livre poids de ville lui reviendra si l'on tire de Cadix sur Lyon à 75^s pour une piastre, & s'il y a 15# pour 100 de frais, il doit faire cette regle conjointe,

Si 116 ℔ p. de Lyon valent 100 ℔ poids de Paris,
26 ℔ $\frac{1}{2}$ de Paris valent 1 arobe,
1 arobe vaut . . . . 80 ducats,
1 ducat vaut . . . . 11 réaux,
8 réaux valent . . . 1 piastre de change,
1 pia. de change vaut 75ˢ de France
20ˢ de France valent 1 ₶,
100 ₶ sans frais valent 115 ₶ avec frais,
à combien x reviendra, . . 1 ℔ p. de Lyon coch.

Si l'on forme une équation de toutes ces égalités, on aura $116 \times 26\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 8 \times 1 \times 20 \times 100 \times x = 100 \times 1 \times 80 \times 11 \times 1 \times 75 \times 1 \times 115 \times 1$; corrigeant & divisant par 80, on aura $116 \times 26\frac{1}{2} \times 2 \times x = 11 \times 75 \times 115$, d'où $6148x = 94875$, d'où $x = \frac{94875}{6148} = 15$ ₶ 8ˢ 7ᵈ $\frac{289}{1537}$, valeur de la livre de cochenille, rendue dans le magasin, poids de Lyon. C. Q. F. Dét.

472. AUTRE APPLICATION. Un Négociant de Genève à qui on donne avis de Cadix que l'arobe de cochenille pesant 26 livres $\frac{1}{2}$ poids de Paris coûte 80 ducats de 11 réaux, desire savoir combien lui reviendra la livre en faisant les fonds en papiers sur Amsterdam qu'il pourroit avoir à 92 deniers de gros pour 3 ₶ de Genève, qu'il remettroit à son correspondant de Cadix, qui les négocieroit à 97 deniers pour un ducat, & que les frais seroient de 19 pour 100.

Il doit faire cette regle conjointe,

88 ℔ $\frac{3}{4}$ p. de Genève valent 100 ℔ poids de Paris,
26 ℔ $\frac{1}{2}$ p. de Paris valent . . 1 arobe de Cadix,
1 arobe coûte . . . . . . 80 ducats,
1 ducat vaut . . . . 11 réaux,
1 réal vaut . . . . 34 maravedis,
375 maravedis valent . . . 1 ducat de change,
1 ducat de change vaut 97 deniers de gros,
92 deniers de gros valent 3^{tt} de Gen. cour.
100^{tt} de Gen. sans frais val. 119 avec frais,
à combien x^{tt} avec frais
reviendra . . . . . . 1 ℔ p. de Genève,
de cochenille.

Si l'on forme une équation de toutes ces égalités, on aura (271), $88\frac{3}{4} \times 26\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 \times 375 \times 1 \times 92 \times 100 \times x = 100 \times 1 \times 80 \times 11 \times 34 \times 1 \times 97 \times 3 \times 119 \times 1$; corrigeant & divisant par 15, on aura $88\frac{3}{4} \times 26\frac{1}{2} \times 25 \times 92 \times x = 16 \times 11 \times 34 \times 97 \times 119$, ou $5409312\frac{1}{2} \times x = 69073312$, d'où $x = \frac{69073312}{5409312\frac{1}{2}} = \frac{138146624}{10818625}$, ce qui se réduit à $x = 12^{tt}\ 15^{s}\ 4^{d}$ & environ $\frac{3}{5}$ denier monnoie courante de Genève, dont chaque livre courante vaut 1^{tt}. 13^{s}. 4^{d} argent de France. C. Q. F. Dét.

Comme il ne s'agit point ici d'un traité de Commerce, ces exemples suffisent pour mettre le Lecteur en état de faire toutes sortes de spéculations utiles, selon les circonstances & les connoissances relatives aux questions proposées.

J'ajouterai cependant encore le problême suivant, relatif au remboursement d'un capital avec ses intérêts, parce que la plupart des Financiers & des Arithméticiens y échouent, à cause des différentes inconnues qu'il faut y introduire.

472 A. PROB. On a prêté 10000^{tt} pour 4 an-

nées, à raiſon de 5 pour cent, exigeant le remboursement du capital & des intérêts, en 4 paiemens égaux; le premier à la fin de la premiere année; le ſecond à la fin de la ſeconde année; le 3e à la fin de la 3e année, & le 4e à la fin de la 4e année, qui doit ſolder la dette; de combien doit être chaque paiement?

SOLUTION. Si on ſuppoſe le problême réſolu; & que z repréſente le paiement de chaque année; il eſt certain que le premier paiement, quel qu'il ſoit, contient l'intérêt de la premiere année, ſavoir, 500# $= d$ plus une partie du capital 10000#; j'exprime cette partie inconnue par x; ainſi le premier ſera $x + d = z$. J'exprime par y ce que l'on prend du reſtant du capital pour joindre avec l'intérêt de la ſeconde année pour faire le ſecond paiement; enfin, je nomme m ce qu'on prend du capital la 3e année, & u ce qu'on prend du capital à la fin de la 4e année, qui eſt ce qui reſte du capital, le 3e paiement fait; & ce reſte u, quel qu'il ſoit, joint à ſon intérêt, doit faire une ſomme égale au premier paiement $x + d$; ainſi on aura $u + \frac{u}{20} = \frac{21u}{20} = x + d$; ſi on fait $a = 21$ & $b = 20$, on aura $\frac{au}{b} = x + d$, d'où $au = bx + bd$, d'où $u = \frac{bx + bd}{a}$; j'obſerve que $bd = 20 \times 500 = 10000$#, capital. Cela poſé:

Le premier paiement $x + d$ étant fait, le reſte du capital eſt $bd - x$, qui gagne dans le courant de la ſeconde année $\frac{bd - x}{b}$: cet intérêt joint à y, donne pour l'expreſſion du 2e paiement $\frac{bd - x}{b}$

$+ y = x + d$, premier paiement, d'où $bd - x + by = bx + bd$, corrigeant, transposant & divisant par b, on aura $y = x + \frac{x}{b} = x + \frac{x}{20}$, d'où $y = \frac{21x}{20} = \frac{ax}{b}$. Le second paiement étant fait, il reste du 1er capital $bd - x - y$, qui rapporte dans le courant de la 3e année $\frac{bd - x - y}{b}$, qui étant joint à m, on aura le 3e paiement $= \frac{bd - x - y}{b} + m = x + d$, premier paiement, d'où $bd - x - y + bm = bx + bd$, d'où corrigeant, transposant & divisant par b, on aura $m = x + \frac{x}{b} + \frac{y}{b} = \frac{21x}{20} + \frac{y}{20}$, mais $y = \frac{21x}{20}$; donc substituant à la place de $\frac{21x}{20}$, sa valeur y, on aura $m = y + \frac{y}{b} = \frac{21y}{20}$. Le reste du capital à la fin de la 3e année sera $bd - x - y - m$, qui gagne dans le courant de la 4e année $\frac{bd - x - y - m}{b}$, ainsi le 4e & dernier paiement est $\frac{bd - x - y - m}{b} + u = x + d$, premier paiement; d'où $bd - x - y - m + bu = bx + bd$; corrigeant, transposant & divisant par b, on aura $u = x + \frac{x}{b} + \frac{y}{b} + \frac{m}{b} = \frac{21x}{20} + \frac{y}{20} + \frac{m}{20}$, ou $u = y + \frac{y}{20} + \frac{m}{20} = \frac{21y}{20} + \frac{m}{20} = \frac{21m}{20}$, donc $u = \frac{21m}{20}$, ce qui indique, 1°. que ce qu'on prend du capital dans chaque paiement est le $\frac{21}{20}$ de ce qu'on a pris du capital dans le paiement précédent; 2°. que si dans $u = \frac{21}{20}m$, on substitue à la place de m sa valeur $\frac{21}{20}y$, on aura $u = \frac{21 \times 21}{20 \times 20}y$, & si

on ſubſtitue à la place de y ſa valeur $\frac{21}{20}x$, on aura $u = \frac{21.21.21}{20.20.20}x = \frac{a^3x}{b^3}$; mais on a déjà trouvé $u = \frac{bx+bd}{a}$; on aura donc cette équation $\frac{a^3x}{b^3} = \frac{bx+bd}{a}$, d'où $a^4x = b^4x + b^4d$, tranſpoſant, on aura $a^4x - b^4x = b^4d$, diviſant par $a^4 - b^4$, on aura $x = \frac{b^4d}{a^4-b^4} = \frac{(20)^4 \times 500}{(21)^4-(20)^4}$. C. Q. F. Dét.

L'on voit donc que la formule qui indique ce que l'on doit prendre du capital & joindre à l'intérêt de la premiere année pour faire le premier paiement, eſt l'intérêt de la premiere année multiplié par le denier de l'intérêt élevé à la puiſſance déſignée par le nombre des paiemens, ici à la 4[e] puiſſance; le tout diviſé par la même puiſſance d'un nombre qui excede le denier de l'intérêt d'une unité, moins cette même puiſſance du denier de l'intérêt; ce diviſeur eſt ici $a^4 - b^4 = (21)^4 - (20)^4$. S'il y avoit dix paiemens, on auroit pour la valeur de x cette formule,

$$x = \frac{b^{10}d}{a \quad -b^{10}} = \frac{(20)^{10}.d}{(21)^{10}-(20)^{10}}. \text{ C. Q. F. B. R.}$$

Il eſt bon d'obſerver que ces quantités x, y, m, u, que l'on prend ſur le capital dans chaque paiement pour joindre à l'intérêt de l'année correſpondante, ſont en progreſſion géométrique, dont la raiſon eſt $\frac{a}{b}$; car on a,

1°. $\frac{ax}{b} = y$, d'où $b : a :: x : y$
2°. $\frac{ay}{b} = m$, d'où $b : a :: y : m$
3°. $\frac{am}{b} = u$, d'où $b : a :: m : u$

d'où $x : y :: y : m :: m : u$, ou $\div\div x, y, m, u$. C. Q. F. B. R.

PROPRIÉTÉS

PROPRIÉTÉS PARTICULIERES DES NOMBRES.

Du nombre 9.

473. On a vu (n°. 123) dans la réduction des fractions à leurs moindres termes, que tout nombre composé de chiffre dont l'addition donne une ou plusieurs fois 9, se divise exactement par 9 : la raison en est que si on multiplie 9 par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c., on a des produits 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, &c. tels que l'addition de leurs chiffres donne 9 ; on voit que 1 & 8 font 9, 2 & 7 font 9, &c. Cette propriété du 9 vient de ce que tout chiffre qui le multiplie donne pour produits autant de dixaines qu'il vaut d'unités, moins ce nombre d'unités ; 9 × 7 donne 7 dixaines moins 7, savoir 63 = 70 — 7 ; ce produit 63 contient donc 7 dixaines moins une dixaine, plus 3 unités, différence du multiplicateur 7 à 10. Or, en général la différence d'un chiffre quelconque à 10, ajoutée à ce chiffre diminué d'une unité, donne 9 ; donc tout produit de deux chiffres qui a 9 pour facteur est composé de chiffres dont l'addition donne une ou plusieurs fois 9, puisque le chiffre qui est au rang des dixaines représentera toujours l'autre facteur diminué d'une unité, & que celui qui est au rang des unités représentera la différence de cet autre facteur à 10. Et il est clair que le même raisonnement aura lieu lorsque le multiplicateur de 9 aura plus d'un chiffre, parce que s'il en a deux,

par exemple 21, on pourra faire pour les 20 unités que renferme le chiffre qui est au rang des dixaines, le même raisonnement qu'on fait pour le chiffre 2 lorsqu'il est au rang des unités.

Des nombres premiers.

474. DÉF. On appelle *nombres premiers*, les nombres qui n'ont d'autres diviseurs qu'eux-mêmes ou l'unité; ainsi les nombres premiers compris entre 1 & 10 sont 2, 3 $= a$, 5, 7 $= b$; entre 10 & 100 ils sont au nombre de 19: savoir, 11 $= c$, 13 $= d$, 17 $= e$, 19 $= f$, 23 $= g$, 29 $= h$, 31 $= j$, 37 $= k$, 41 $= l$, 47 $= m$, 53 $= n$, 59 $= p$, 61 $= q$, 67 $= r$, 71 $= s$, 73 $= t$, 79 $= u$, 83 $= x$, 89 $= y$, 97 $= z$, 101 $= a^{1}$, &c. Pour construire la table des nombres premiers, & la suivre aussi loin que l'on voudra, on a observé 1°. que tout nombre pair, ou terminé par 5 ou par zéro, n'étoit pas nombre premier, excepté 2 & 5 qui sont des nombres premiers; & que tout nombre plus grand que 5 & qui finit par 5 est divisible par 5, & souvent par 3; 2°. que tous les nombres premiers, excepté 2 & 5, se terminent par des chiffres impairs, & seulement par ces quatre caracteres 1, 3 $= a$, 7 $= b$, 9; & que tout nombre terminé par un de ces chiffres 0, 2, 4, 5, 6, 8, n'est pas un nombre premier; que tout nombre premier est fait du double d'un nombre premier, plus ou moins l'unité ou plus ou moins un petit nombre premier; on voit que 11 est fait de deux fois le nombre premier 5 plus 1; que 13 est fait de deux fois le nombre premier 7 moins 1; que 17 est fait de deux fois le nombre premier 7, plus le

nombre premier 3 ; que 31 est fait de deux fois 13 plus 5, ou de 2 fois 17 moins 3 ; ainsi des autres (1).

D'après ces observations, si on désigne par *a* tout nombre divisible par 3 ; par *b* tout nombre divisible par 7 ; par *c* tout nombre divisible par 11, &c. & par un point . tout nombre premier ; on formera aisément la table qui comprend les nombres premiers qui se trouvent entre 1 & 1200, & qu'on peut continuer aussi loin qu'on voudra. Pour cet effet, je forme 3 colonnes verticales A, B, C, qui comprennent la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... jusqu'à 120 ; ces colonnes sont espacées de maniere que vers le sommet je place les 4 caracteres 1, 3, 7, 9, par l'un desquels se termine tout nombre premier, excepté 2 & 5 ; au-dessous de ces caracteres 1, 3, 7, 9, on trouve entre les colonnes à la suite de chaque nombre de la colonne, les caracteres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *j*, &c. ou des points ; *par exemple*, à côté de 1 pris dans la colonne A, on trouve un point . sous chaque caractere 1, 3, 7, 9 ; cela indique que les nombres 11, 13, 17, 19, sont des nombres premiers. On voit que tout nombre premier au-dessous de 1200 ne peut être qu'un nombre pris dans les colonnes, suivi d'un de ces quatre chiffres 1, 3, 7, 9. A côté de 2 dans le rang horisontal on trouve *a* sous 1, ce qui indique que 21 est divisible par 3 ;

(1 Léibnitz a remarqué, dans une lettre écrite au Journal des Savans le 11 Février 1678, que tout nombre premier au-dessus de 5, étant diminué de 1 ou de 5, est divisible par 6. Ainsi, *par exemple*, $7 - 1 = 6$ $11 - 5 = 6$; $13 - 1 = 6 \times 2$; $101 - 5 = 6 \times 16$ &c.

on trouve un point . sous le 3 supérieur ; ce qui indique que 23 est un nombre premier ; on trouve un *a* sous le 7 dans le même rang horisontal, ce qui indique que 27 est divisible par 3, &c.

475. *TABLE tirée du crible d'Eratosthenes, par laquelle on détermine tous les nombres premiers compris entre 1 & 1200, de même que tous les nombres impairs intermédiaires qui ont des diviseurs désignés par les valeurs des lettres* a, b, c, d, &c.

A Nombre	1, 3, 7, 9	B Nombre	1, 3, 7, 9	C Nombre	1, 3, 7, 9
1	. . . .	41	*a b a* .	81	. *a f a*
2	*a* . *a* .	42	. *a b a*	82	. . . .
3	. *a* . *a*	43	. . *f* .	83	*a b a* .
4	. . . *b*	44	*a* . *a* .	84	*h a b a*
5	*a* . *a* .	45	*c a* . *a*	85	*g* . . .
6	. *a* . *a*	46	. . . *b*	86	*a* . *a c*
7	. . *b* .	47	*a c a* .	87	*d a* . *a*
8	*a* . . .	48	*d a* . *a*	88	. . . *b*
9	*b a* . *a*	49	. *e b* .	89	*a f a k*
10	. . . .	50	*a* . *a* .	90	*e a* . *a*
11	*a* . *a b*	51	*b a c a*	91	. *c b* .
12	*c a* . *a*	52	. . *e g*	92	*a* . *a* .
13	. *b* . .	53	*a d a b*	93	*b a* . *a*
14	*a c b* .	54	. *a* . *a*	94	. *g* . *d*
15	. *a* . *a*	55	*f b* . *d*	95	*a* . *a b*
16	*b* . . *d*	56	*a* . *a* .	96	*f a* . *a*
17	*a* . *a* .	57	. *a* . *a*	97	. *b* . *c*
18	. *a c a*	58	*b c* . *f*	98	*a* . *a b*
19	. . . .	59	*a* . *a* .	99	. *a* . *a*
20	*a b a c*	60	. *a* . *a*	100	*b* . *f* .

A Nombre	1, 3, 7, 9	B Nombre	1, 3, 7, 9	C Nombre	1, 3, 7, 9
21	. a b a	61	d . . .	101	a . a .
22	d . . .	62	a b a e	102	. a d a
23	a . a .	63	. a b a	103	. . e .
24	. a d a	64	. . . c	104	a . a .
25	. c . b	65	a . a .	105	. a b a
26	a . a .	66	. a g a	106	. . c .
27	. a . a	67	c . . b	107	a h a d
28	. . b e	68	a . b d	108	g a . a
29	a . a d	69	. a e a	109	. . . .
30	b a . a	70	. f b .	110	a . a .
31	. . . c	71	a g a .	111	c a . a
32	a e a b	72	b a . a	112	f . b .
33	. a . a	73	e . c .	113	a c a e
34	c b . .	74	a . a b	114	b a j a
35	a . a .	75	. a . a	115	. . d f
36	f a . a	76	. b d .	116	a . a b
37	b . d .	77	a . a b	117	. a c a
38	a . a .	78	c a . a	118	. b . h
39	e a . a	79	b d . e	119	a . a c
40	. d c .	80	a c a .	120	. a e a

Si on veut savoir si 447 est un nombre premier, on cherchera 44 dans la colonne B des nombres, on trouvera dans le rang horisontal la lettre *a* sous 7, on conclura que 447 n'est pas nombre premier & qu'il est divisible par 3. On trouve donc dans cette table tous les nombres depuis 1 jusqu'à 1200, qui se terminent par un de ces chiffres 1, 3, 7, 9; les nombres premiers sont marqués d'un point ., les autres sont désignés par leurs diviseurs *a*, *b*, *c*, *d*, &c.; *par exemple*, si on veut savoir si 1147 est ou n'est pas nombre

premier, on cherche 114 dans la colonne C des nombres; on trouve dans le rang horisontal sous le chiffre supérieur 7, la lettre *j*, on conclut que 1147 n'est pas nombre premier, & qu'il est divisible par le nombre 31 indiqué par la lettre *j*; on trouvera de même que 1027 n'est pas nombre premier, parce qu'à côté de 102, on trouvera sous 7 la lettre *d*, qui indique que 1027 est divisible par 13 = *d*: mais on trouvera que 503 est un nombre premier, parce qu'à côté de 50 pris dans la colonne B, on trouvera un point . sous le 3 supérieur, ainsi des autres. On voit donc que les points . marqués dans les intervalles des colonnes A, B, C, indiquent les nombres premiers, & les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. ceux qui ne le sont pas; on trouve sous 9 un point, correspondant à 14, on conclut que 149 est un nombre premier; ainsi des autres. C. Q. F. Dét. & B. R.

Du nombre parfait.

476. DÉF. On appelle nombre parfait celui qui est égal à la somme de toutes ses parties exactes ou aliquotes. 6 est le premier des nombres parfaits, parce qu'il est égal à toutes ses parties exactes 1, 2, 3.

477. PROB. Déterminer tant de nombres parfaits qu'on voudra.

SOLUTION. Si on prend la suite ou progression géométrique croissante, dont la raison est 2 & dont le premier terme est aussi 2, continuée aussi loin qu'on voudra,

÷ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, & qu'on ôte de chaque terme une unité, on aura cette suite de nombres impairs 1, 3, 7, 15, 31,

63, 127, 255, 511. On choisira dans cette suite les nombres premiers 3, 7, 31, 127. Chacun de ces nombres premiers multipliera le terme de la progression géométrique, qui précede celui qui égale ce nombre premier plus un; le produit sera un nombre parfait. On aura les quatre suivans,

$2\times 3 = 6 = 1+2+3 = 2\times(4-1)$ . . . . 1er nombre parfait

$4\times 7 = 28 = 1+2+4+7+14 = 4\times(8-1) = 28$ 2e nomb. parfait

$16\times 31 = 496 = 16\times(32-1)$ . . . . . . 3e nombre parfait

$64\times 127 = 64\times(128-1) = 8128$ . . . . . 4e nombre parfait

On voit que les nombres parfaits ne se trouvent que de loin en loin, puisqu'entre 28 & 496 il n'y en a point; de même qu'entre 497 & 8128. C.Q.F.D.

Des nombres amiables.

478. Déf. Deux nombres sont *amiables*, lorsqu'ils sont tels que chacun est égal à la somme des parties exactes de l'autre.

479. Prob. Trouver deux nombres amiables

5, 11, 23, 47, 95 ... 1ere suite,
2, 4, 8, 16, 32 &c. 2e suite, nombres doubles,
6, 12, 24, 48, 96 ... 3e suite,
71, 287, 1151, 4607 ... 4e suite.

Solut. On formera la suite des nombres doubles, au-dessous la suite double qui commence par 6, & au-dessus celle des nombres inférieurs diminués d'une unité, le tout disposé comme on voit. On trouve le 1er terme d'une 4e suite en multipliant les 2 premiers termes 6 & 12 de la 3e suite; & ôtant l'unité du produit 72, on a un reste 71 qu'il faut multiplier par le second terme 4 de la seconde suite; le produit 284 est un des nombres amiables. Pour trouver le second, il

faut multiplier les 2 premiers termes 5 & 11 de la premiere suite, on a 55 qu'il faut multiplier par le second terme 4 de la seconde suite ; le produit 220 est le second nombre amiable. En effet le parties exactes de 220 sont 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, dont la somme est 284. C. Q. F. Dét.

Il est bon d'observer 1°. que les termes de la 4e suite sont faits de 2 termes de suite de la 3e suite multipliés ensemble ; ôtant du produit l'unité, on a $287 = 12 \times 24 - 1$; $1151 = 24 \times 48 - 1$; $4067 = 48 \times 96 - 1$, &c. ; 2°. qu'il faut, pour trouver 2 autres nombres amiables, que le terme de la 4e suite soit nombre premier, comme 1151 ; que son correspondant 47 de la premiere suite soit un nombre premier de même que le terme précédent 23 de cette premiere suite ; ainsi $23 \times 47 \times 16 = 17296$ est un des nombres amiables ; $1151 \times 16 = 18416$ est le second. On peut juger de-là combien les nombres amiables sont rares.

De quelques propriétés des suites.

480. Faisons connoître les propriétés des différentes puissances des termes de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c. & de leur différence 1ere, 2e, 3e, &c.

1°. Soit la suite des quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, dont la différence de chacun avec le suivant donne,

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 . . . 1ere diff.
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 . . . 2e diff.

On voit que la suite des quarrés est faite de la

suite des termes de la progression arithmétique des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. dont la différence est 2. C. Q. F. B. R.

2°. La suite des cubes est . . . .

. . . .	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000,
1eres diff.		7,	19,	37,	61,	91,	127,	169,	217,	271,
2e diff.			12,	18,	24,	30,	36,	42,	48,	54,
3e diff.				6,	6,	6,	6,	6,	6,	6.

On peut remarquer cette propriété singulière de la suite des cubes des nombres naturels que la somme des 2 premiers cubes 1 & 8 est un nombre quarré 9 ; que les 3 premiers cubes $1 + 8 + 27 = 36$ quarré de 6 ; que les 4 premiers cubes $1 + 8 + 27 + 64 = 100$ quarré de 10 somme des 4 premiers nombres naturels $1 + 2 + 3 + 4 = 10$; que la somme des 5 premiers cubes $1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$ quarré de 15, somme des 5 premiers nombres naturels $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, ainsi de suite.

La suite des 4es puissances a pour ses différences 4es le nombre constant 24 : la suite des 5es puissances des nombres naturels a pour différence 5e de ses termes le nombre constant 120 qui a pour propriété singuliere d'être moitié de la somme de tous ses diviseurs exacts 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60.

Problême qui montre l'usage qu'on peut faire du complément arithmétique.

481. Prob. Un Financier qui se flattoit d'être bon Arithméticien dit à un Géomètre, en lui montrant sa bourse de louis d'or : si vous déterminez par vos combinaisons combien il y a de

plus dans cette bourſe que dans ce ſac d'argent qui contient 3474ᵗᵗ, je vous donne 100 louis d'or; ſi vous ne le devinez pas, vous me ferez préſent de votre téleſcope : le Géomètre accepte la propoſition, & dit au Financier, ajoutez 6526ᵗᵗ à la valeur de vos louis d'or; ôtez 10000 du réſultat; le reſte ſera l'excès de vos louis d'or ſur la ſomme 3474. On vérifie, on trouve dans la bourſe de louis d'or 17952ᵗᵗ, à quoi ajoutant 6526, on a 24478, d'où on ôte 10000, il reſte 14478, différence de 17952 à 3474.

Car qui de	17952
ôte . . .	3474
il reſte. .	14478
preuve . .	17952

Le Financier paya les 100 louis d'or au Géomètre, ſans concevoir la raiſon de l'opération; c'eſt que ce Financier ignoroit les propriétés du complément arithmétique (337). C. Q. F. Dét.

NOTIONS SUR LE CALENDRIER.

Un Traité complet d'Arithmétique ne peut pas s'étendre à toutes les ſciences où l'on emploie le calcul numérique. Mais on ne croit pas hors de propos de donner une idée de ſon uſage dans la ſcience du calendrier; en effet, on a beſoin preſque dans tous les états de ſavoir trouver 1°. ſi une année propoſée eſt biſſextile ou non; 2°. le nombre d'or ou le cycle lunaire; 3°. l'épacte de l'année propoſée; 4°. la

nouvelle lune d'un mois quelconque dans une année donnée; 5°. son âge un jour proposé; 6°. la lettre dominicale d'une année fixée; 7°. quel est le cycle solaire d'une année donnée; 8°. la fête de Pâques & les autres fêtes mobiles de l'année; 9°. quel jour commence chaque mois d'une année proposée, &c.; c'est ce qu'on va développer briévement.

482. PROB. On demande à un Astronome la maniere de déterminer par les doigts les mois de l'année qui ont 31 ours.

SOLUTION. Il dit: fermez les doigts de la main qui joignent le pouce & le petit doigt; il vous restera 3 doigts ouverts qui indiqueront les mois de 31 jours, commençant l'année par le mois de Mars désigné par le pouce ouvert; les doigts fermés indiqueront les mois de 30 jours, & celui de Février de 28 ou de 29 jours, selon que l'année sera bissextile ou non. On trouvera donc en comptant ainsi que les mois de Mars, Mai, Juillet, Août, Octobre, Décembre & Janvier sont chacun de 31 jours, & que ceux d'Avril Juin, Septembre & Novembre sont de 30 jours, & Février de 28 jours ou 29 dans l'année bissextile. C. Q. F. B. R.

483. DÉF. L'année solaire est selon les calculs des Astronomes de 365 jours 5 heures 49 minutes, tems que le soleil emploie à parcourir l'écliptique, & à revenir au point de départ; mais on compte 3 années de suite chacune de 365 jours & la 4e année de 366 jours. C'est cette année qu'on nomme bissextile. Elle est trop longue de 44 minutes, c'est-à dire, que la révolution de 3 années communes, & d'une année bissextile surpasse de 44 minutes, quatre révolutions du soleil dans son

écliptique ; c'est pourquoi de 400 en 400 ans on néglige 3 années centenaires qui seroient bissextiles en suivant le calcul, & qui ne sont pas comptées comme telles. Par ce moyen l'erreur des 44 minutes sur 4 ans se trouve corrigée. C'est au Pape Grégoire XIII à qui on en est redevable. Il fit cette correction en 1582, & dès cette époque les années centenaires qui seront divisibles exactement par 400 seront bissextiles, & les années centenaires qui ne seront pas divisibles exactement par 400 ne le seront pas. L'année 1600 étoit bissextile, mais 1700 ne l'étoit pas, de même les années 1800, 1900 ne seront point bissextiles, l'année 2000 sera bissextile, de même que 2400 ; par la même raison les années 2100, 2200, 2300 ne seront pas bissextiles, parce qu'elles ne sont pas divisibles par 400 sans reste. Pour trouver si une autre année est bissextile comme 1780, on divisera ce nombre par 4 ; on trouvera zéro pour reste ; on conclura que 1780 est une année bissextile ou de 366 jours. On trouvera de même que les années 1784, 1788, 1792, 1796 seront bissextiles, que 1800 ne le sera pas, & que 1804 sera la premiere bissextile du 19e siécle. Selon ce calcul on voit que dans 400 années solaires on compte 303 années communes de 365 jours chacune, & 97 années bissextiles de 366. Ces années font ensemble 210379680 minutes, & 400 années solaires chacune de 365 jours 5 heures 49 minutes ne font que 210379600 minutes. Il y a donc tous les 400 ans une erreur de 80 minutes ou d'une heure & un tiers.

484. PROB. Déterminer combien il faut compter d'années communes, & d'années bissexti-

les pour faire un nombre exact d'années solaires.

SOLUTION. Exprimons l'année commune par *a*, l'année bissextile par *b*, & l'année solaire par *s*. Comme l'année solaire surpasse l'année commune de 5 heures 49 minutes ou de 349′, & est surpassée par l'année bissextile de 18 heures 11 minutes ou de 1091, on aura ces deux équations,

$$\left.\begin{array}{l} 1^o \ldots a + 349' = s \\ 2^o \ldots b - 1091 = s \end{array}\right\}$$ Si on multiplie la première équation par 1091, & la seconde par 349, on aura ces deux nouvelles équations,

$$\left.\begin{array}{l} 1091\, a + 349 \times 1091 = 1091\, s \\ 349\, b - 349 \times 1091 = 349\, s \end{array}\right\}$$ Si on les ajoute, on aura pour résultat $1091\, a + 349\, b = 1440\, s$; ce qui fait voir que pour 1440 années solaires, il faut compter 1091 années communes, & 349 années bissextiles qu'il faut intercaler entre les 1091 années communes. Cette solution est exacte; car l'année solaire est de 525949 minutes, & les 1440 années sont de 757366560 minutes;

l'année commune = 525600′		
& les 1091 années	= 573429600	}
l'année bissextile = 527040′		}
& les 349 années	= 183936960	}
dont la somme	= 757366560′	

C. Q. F. Dét. & B. R.

Du nombre d'or ou du cycle lunaire.

485. Le nombre d'or ou le cycle lunaire eſt une révolution de 19 années ſolaires, à la fin deſquelles le ſoleil & la lune reviennent à peu près dans la même poſition. L'année ſolaire eſt de 365 jours 5 heures 49′ ou de 525949 minutes. La durée d'une lunaiſon eſt de 42524 minutes. On a trouvé en combinant ces durées que 235 lunaiſons n'excédoient 19 années ſolaires que de 109 minutes ou d'une heure 49′; ainſi on voit qu'après 19 années ſolaires les nouvelles lunes doivent retomber aux mêmes jours des mêmes mois & preſqu'à la même heure. Si dans la premiere de ces années ſolaires la nouvelle lune eſt arrivée le 4 Janvier, le 2 Février, &c.; au bout de 19 ans les nouvelles lunes arriveront de même le 4 Janvier, le 2 Février, &c. Cela ſera conſtant, ſi on ſuppoſe que 235 lunaiſons équivalent préciſément à 19 années ſolaires. Il ſuffira donc d'avoir déterminé une fois pendant 19 années ſolaires les jours des mois où arriveront les nouvelles lunes; & quand on ſaura quel rang tient dans cette période une année donnée, on ſaura auſſi-tôt quels jours de chaque mois tombent les nouvelles lunes.

486. PROB. Trouver le nombre d'or d'une année propoſée ou le rang qu'elle occupe dans le cycle lunaire.

SOLUTION. On ſait que la premiere année de l'ére chrétienne avoit 2 pour nombre d'or, ou qu'elle étoit la deuxieme du cycle lunaire. Ainſi le cycle lunaire commençoit une année avant l'ére chrétienne. Cela poſé, ſi on demande quel étoit le nombre d'or de l'année 1754, il faut ajouter 1 à ce nombre, diviſer par 19 le réſultat

1755, & n'avoir égard qu'au reste 7 qui indique que l'année 1754 avoit 7 pour nombre d'or, ou qu'elle étoit la 7ᵉ année du cycle lunaire. Si après avoir ajouté l'unité à l'année proposée, & divisé le résultat par 19, le reste est zéro; on conclura que 19 est le nombre d'or de l'année proposée ou qu'elle est la 19ᵉ du cycle lunaire. L'année 1747 étoit dans ce cas, 19 étoit son nombre d'or; on trouvera que 15 est le nombre d'or de l'année 1781; car si on divise 1782 par 19, on aura pour reste 15. C. Q. F. Dét.

De l'Epacte.

487. L'épacte est le nombre des jours dont la lune est vieille à la fin d'une année proposée; on en concevra aisément la formation, en faisant attention que l'année lunaire est composée de douze lunaisons, qui sont moindres qu'une année solaire d'environ 11 jours; car l'année solaire est de 365 jours 5 heures 49′ ou de 525949 minutes, & une lunaison est de 29 jours 12 heures 44′ ou de 42524 minutes. Les 12 lunaisons sont donc 501288 minutes, qui étant ôtées de l'année solaire 525949′, il reste 15661′ = 10 jours 21 heures 1′, que l'on compte pour 11 jours; ainsi supposant qu'une année lunaire, & qu'une année solaire commencent ensemble au premier Janvier, la lune sera vieille de 11 jours à la fin de cette année, car il y aura eu 12 lunaisons & 11 jours écoulés de la treizieme; conséquemment à la fin de la seconde année la lune sera vieille de 22 jours, & à la fin de la troisieme année elle le seroit de 33 jours; mais comme ces 33 jours excedent une lunaison, on en intercale une de 30 jours, en sorte

que cette année a 13 lunaisons, & que la lune est seulement vieille de 3 jours à la fin de cette 3e. année.

Telle est donc la marche des épactes. Celle de la premiere année du cycle lunaire ou qui répond au nombre d'or 1 est XI. Pour avoir l'épacte de chaque année du cycle lunaire on multiplie le nombre d'or de l'année proposée par 11; si le résultat excede 30, on divise le résultat par 30; le reste de la division marque l'épacte de l'année proposée; si le produit du nombre d'or par 11 est au-dessous de 30, ce produit est l'épacte de l'année proposée. Ainsi pour trouver l'épacte d'une année dont le nombre d'or est 7, on multiplie 7 par 11; on divise le produit 77 par 30; le reste 17 indique que l'épacte de la 7e année du cycle lunaire est 17 ou qu'à la fin de la 7e année du cycle lunaire, la lune est vieille de 17 jours. Par un semblable procédé on trouvera l'épacte de chaque année du cycle lunaire, & qu'à la fin de la 19e année, qui est la derniere du cycle lunaire, la lune a 29 jours ou qu'elle se renouvelle au commencement de la premiere année du cycle lunaire suivant; on trouvera, dis-je, que l'ordre des épactes est XI, XXII, III, XIV, XXV, VI, XVII, XXVIII, IX, XX, I, XII, XXIII, IV, XV, XXVI, VII, XVIII, XXIX.

488. La fixation de la Pâque chrétienne au Dimanche qui suit la pleine lune qui arrive à l'équinoxe du printems, fixé au 21 Mars ou qui le suit immédiatement, & la réformation du calendrier par Grégoire XIII, apportent quelque changement à la maniere de trouver l'épacte d'une année postérieure à 1582; dans ce cas multipliez le nombre d'or de l'année proposée par 11, ôtez

du

du produit le nombre de jours retranchés par la réformation de Grégoire XIII, savoir 10 si l'année est entre 1582 & 1700, 11 jours entre 1700 & 1800, 12 jours entre 1800 & 1900, 13 jours entre 1900 & 2000, &c.; divisez le résultat par 30 sans avoir égard au quotient, le reste de la division sera l'épacte de l'année proposée; s'il s'agit de trouver l'épacte de 1780, je multiplie le nombre d'or 14 de cette année par 11; j'ôte 11 du produit 154; je divise le résultat 143 par 30, il reste 23 qui est l'épacte de l'année 1780; de même si on vouloit savoir quelle sera l'épacte de l'année 1787, on multipliera son nombre d'or 12 par 11, on ôtera 11 du produit 132; on divisera le résultat 121 par 30, il restera 1 qui sera l'épacte de 1787.

489. PROB. Trouver le jour de la nouvelle lune d'un mois proposé dans une année donnée.

SOLUTION. 1°. Trouvez l'épacte de l'année proposée (479), ajoutez à l'épacte le nombre des mois écoulés depuis le mois de Mars exclusivement jusqu'au mois en question inclusivement; ôtez la somme de 30, le reste sera le quantieme du mois où arrivera la nouvelle lune. On demande, *par exemple*, le jour de la nouvelle lune du mois de Juillet 1780. L'épacte de cette année est 23, le nombre de mois écoulés depuis Mars est 4; ainsi ajoutant 4 à l'épacte on a 27, qui étant ôté de 30 il reste 3; ce qui indique que la lune a été nouvelle le 3 Juillet 1780. C. Q. F. D.

Dans la solution de ce problême, on peut se tromper de 48 heures à cause de l'irrégularité des mois de l'année, & des lunaisons qui sont tantôt de 29 jours, tantôt de 30 jours. On arrive à un

peu plus d'exactitude, en se servant de la table suivante.

490. *Table qui indique ce qu'il faut ajouter à l'épacte pour chaque mois.*

Janvier 2, Février 3, Mars 1, Avril 2, Mai 3, Juin 4, Juillet 5, Août 7, Septembre 7, Octobre 8, Novembre 10, Décembre 10.

491. PROB. Trouver l'âge de la lune un jour d'un mois & d'une année proposée.

SOLUTION. Il faut ajouter à l'épacte de l'année proposée le nombre qui convient au mois donné (490), & le quantieme du mois; si la somme de ces 3 nombres excede 30, on en ôtera 30, le reste sera l'âge de la lune; si la somme de ces 3 nombres est au-dessous de 30, elle indiquera l'âge de la lune ce jour-là. On demande l'âge de la lune le 20 Septembre 1780. A l'épacte 23 j'ajoute 7 qui répond à Septembre & 20 jours quantieme du jour donné; la somme est 50 d'où j'ôte 30, il reste 20 pour l'âge de la lune le 20 Septembre 1780. Ainsi des autres.

Du Cycle Solaire & de la Lettre Dominicale.

492. DÉF. Le cycle solaire est une révolution de 28 années après laquelle toutes les lettres qui marquent le Dimanche, & tous les autres jours de la semaine ou Féries reviennent dans le même ordre où elles étoient. Ces lettres sont au nombre de sept, A, B, C, D, E, F, G, qui marquent les 7 jours de la semaine, de sorte que la même lettre désigne le même jour de la semaine durant toute une année, & celle qui désigne le Dimanche est la lettre *dominicale* de cette année. Chacune de ces

7 lettres devient dominicale à son tour, & chaque année bissextile a une double lettre dominicale; la premiere sert depuis le premier Janvier jusqu'au 24 Février, & la seconde depuis le 24 Février jusqu'à la fin de l'année bissextile. On donne ci-dessous une table d'un cycle solaire pour les années Juliennes, & une table pour le cycle solaire des années Grégoriennes. Chaque cycle commence par une année bissextile.

TABLE du cycle Julien qui commence avec l'année 1700.

1 ... GF	5 ... BA	9 ... DC	13 ... FE	17 ... AG	21 ... CB	25 ... ED
2 ... E	6 ... G	10 ... B	14 ... D	18 ... F	22 ... A	26 ... C
3 ... D	7 ... F	11 ... A	15 ... C	19 ... E	23 ... G	27 ... B
4 ... C	8 ... E	12 ... G	16 ... B	20 ... D	24 ... F	28 ... A

L'usage de cette table pour les nations qui suivent le calendrier Julien, est que la lettre dominicale de l'année 1700 étoit FG; celle de l'année 1701 étoit E, celle de l'année 1719 étoit D, celle de 1727 étoit A, & qu'en 1728 le cycle recommençoit, & que la lettre dominicale de cette année bissextile étoit GF, on voit qu'à l'aide de cette table on trouvera la lettre dominicale des années suivantes.

TABLE du cycle Grégorien qui commence avec l'année 1700.

1 ... DC	5 ... FE	9 ... AG	13 ... CB	17 ... ED	21 ... GF	25 ... BA
2 ... B	6 ... D	10 ... F	14 ... A	18 ... C	22 ... E	26 ... G
3 ... A	7 ... C	11 ... E	15 ... G	19 ... B	23 ... D	27 ... F
4 ... G	8 ... B	12 ... D	16 ... F	20 ... A	24 ... C	28 ... E

L'usage de cette table pour les nations qui suivent le calendrier Grégorien, est que la lettre dominicale de l'année 1700 étoit DC, que celle de



l'année 1705 étoit D, celle de 1719 étoit A, que celle de 1731 étoit G, & qu'en l'année 1727 le cycle recommençoit & que la lettre dominicale étoit DC; en suivant cette table on trouve que la lettre dominicale de l'année 1780 est BA, & que celle de l'année 1783 sera E, &c.

493. PROB. Trouver la lettre dominicale d'une année quelconque depuis la naissance de Jesus-Christ.

SOLUTION. L'époque du cycle solaire commence 9 années avant la naissance de Jesus-Christ, 1°. Il faut donc ajouter 9 à l'année proposée, & diviser la somme par 28, le reste de la division indique l'année du cycle solaire; s'il ne reste rien, c'est 28 qui est l'année du cycle solaire de l'année proposée; 2°. on cherche ce reste dans la table Julienne ou dans la table Grégorienne, à la suite de ce nombre est la lettre dominicale proposée. *Par exemple*, si on veut savoir quelle est la lettre dominicale de l'année de 1780, j'ajoute 9 à ce nombre, j'ai 1789 que je divise par 28, le quotient indique qu'il s'est écoulé 61 cycles solaires dès son époque, & le reste 25 indique que c'est la 25e année du 62e cycle solaire qui, dans la table Julienne, a pour lettre dominicale ED, & dans la table Grégorienne BA. Ainsi la lettre dominicale de l'année 1780 du cycle Grégorien est BA. On trouve que la lettre dominicale de l'année 1723 étoit C, que celle de 1783 sera E, & que l'année du cycle solaire sera 28. Ces tables servent jusqu'en 1800. C. Q. F. Dét.

493. PROB. Construire une table pour trouver facilement le cycle solaire d'une année proposée de l'ére chrétienne, & le nombre d'or ou le cycle lunaire de la même année.

SOLUTION. Cette table est composée de 3 colonnes. La premiere est faite de la suite des années de l'ére chrétienne, d'abord des 10 premieres années, ensuite de 10 en 10 jusqu'à 100, de 100 en 100 jusqu'à 1000, & de 1000 en 1000 jusqu'à 4000 années.

TABLE.

1ere colonne. Années de l'Ere Chrétienne.	2e colonne. Nombres pour le cycle solaire.	3e colonne. Nombres pour le cycle lunaire.
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9
10	10	10
20	20	1
30	2	11
40	12	2
50	22	12
60	4	3
70	14	13
80	24	4
90	6	14
100	16	5
200	4	10
300	20	15
400	8	1
500	24	6
600	12	11
700	0	16
800	16	2
900	4	7
1000	20	12
2000	12	5
3000	4	17
4000	24	10

La seconde colonne est composée des mêmes nombres que la premiere jusqu'à 20; à côté de 30, on a mis 2 excès de 30 sur le cycle solaire 28 ans, de sorte que chaque nombre de la seconde colonne est le reste de la division du nombre correspondant de la premiere colonne par le cycle solaire 28. Si la division est exacte, on écrit zéro; ce qui arrive à

700. On trouve 24 à côté de 4000, parce qu'en divisant 4000 par 28, il reste 24: par le même procédé, on trouve les autres nombres de cette seconde colonne.

Les nombres de la troisieme colonne sont les mêmes que ceux de la premiere colonne jusqu'à 10. On trouve les autres en divisant chaque nombre de la premiere colonne par le cycle lunaire 19 ans; le reste de chaque division est le nombre correspondant de la 3e colonne. C'est pour cette raison que 1 répond à 20 de la premiere colonne, 11 à 30, 13 à 70, 16 à 700, 17 à 3000, &c.

495. Usage de cette table; 1°. pour trouver le cycle solaire d'une année proposée; *par exemple*, de l'année 1780, on prend dans la premiere colonne les nombres 1000, 700 & 80, dont la somme est 1780. On ajoute les nombres correspondans 20; 0; 24 de la seconde colonne, on a 44, somme à laquelle on ajoute les 9 années du cycle solaire, qui s'étoient écoulées avant la premiere année de l'Ere Chrétienne; on a 53 qu'on divise par le cycle solaire 28; le reste 25 indique que 1780 a 25 de cycle solaire; ainsi des autres.

2°. Pour trouver le cycle lunaire ou le nombre d'or de l'année 1780, on ajoutera les nombres 12, 16, 4 de la 3e colonne correspondans aux nombres 1000, 700, 80 de la premiere colonne qui sont ensemble 1780; on aura 32, on y joindra 1, parce que le cycle lunaire a commencé une année avant la naissance de Jesus-Christ; on aura 33 qui étant divisé par le cycle lunaire 19 donne pour le reste 14 qui est le nombre d'or de l'année proposée 1780, &c.

496. PROB. Déterminer la lettre dominicale d'une année proposée, le quantieme du

mois où tombe le Dimanche étant aussi donné.

SOLUT. Le 14 Mai 1780 étoit un Dimanche. On demande la lettre dominicale de cette année qui est bissextile. Il faut diviser 135 nombre de jours écoulés depuis le 1er Janvier inclusivement jusqu'au 14 Mai inclusivement par le nombre 7 des jours de chaque semaine. Le reste 2 de la division indique que la seconde lettre B est la lettre dominicale, & comme cette année est bissextile, elle a 2 lettres. B A, dont la premiere B sert jusqu'au 24 Février, & A depuis le 24 Février jusqu'à la fin de l'année proposée. Ainsi des autres. C. Q. F. Dét.

497. PROB. Trouver la fête de Pâques & les autres fêtes mobiles.

Il faut être prévenu que le commencement de la lune Paschale est entre le 8 Mars & le 5 Avril inclusivement, & que Pâques est le Dimanche qui suit cette pleine lune.

SOLUTION. 1°. On trouvera l'épacte de l'année proposée (487 & 488). Si l'épacte trouvée ne surpasse pas 23, on l'ôtera de 44; le reste donnera le jour de Mars pour le terme de Pâques. Supposons donc que l'année proposée ait 23 pour épacte; on les ôtera de 44, le reste 21 indiquera que le Dimanche qui suivra le 21 Mars sera le jour de Pâques.

2°. Si l'épacte de l'année proposée étant ôtée de 44, il reste plus de 31, le surplus indiquera le jour d'Avril pour le terme de Pâques, de sorte que si l'épacte de l'année proposée est 6, on l'ôtera de 44; il restera 38 qui excede 31 de 7; ce qui marquera que le terme de Pâques sera le 7 Avril, & que le Dimanche suivant sera le jour de Pâques.

3°. Si l'épacte de l'année proposée excede 23, on l'ôtera de 43, ou seulement de 42 si l'épacte est 24 ou 25; le reste sera le 7 d'Avril pour le terme de Pâques, & le Dimanche suivant sera le jour de Pâques.

4°. La fête de Pâques étant trouvée, toutes les autres fêtes mobiles le sont; car 1°. le Lundi après le 5e Dimanche, ou 35 jours après Pâques sont les *Rogations*; le 40e jour après Pâques est l'Ascension de Notre Seigneur Jésus Christ; le 50e est la *Pentecôte*; le Dimanche suivant, 56 jours après Pâques, est la fête de la Sainte-Trinité, & le Jeudi suivant, 60 jours après Pâques, est la *Fête-Dieu*; le 9e Dimanche avant Pâques est la Septuagésime 63 jours avant Pâques; le 8e Dimanche avant Pâques est la *Sexagésime* qui le précede de 56 jours; la *Quinquagésime* précede Pâques de 49 jours; le Mercredi *des Cendres* est éloigné de Pâques de 46 jours. Ceux qui voudront avoir de plus amples connoissances sur cette matiere, pourront consulter le Traité du calendrier de Rivard, Wolf, le Dictionnaire de Physique, &c.

DES PROPORTIONS HARMONIQUES.

498. PRINCIPE. L'EXPÉRIENCE a fait connoître que si trois cordes d'instrument également grosses & également tendues ont leur longueur, comme ces trois nombres 3, 4, 6, elles forment, lorsqu'elles sont pincées, les trois principaux accords de la musique; savoir, l'octave, la quinte & la quarte. De deux de ces cordes qui seront l'une à l'autre en longueur comme 3 est à 6 ou 1 est à 2, la plus courte fera deux vibrations

dans le tems que la plus longue n'en fera qu'une; ce qui fait l'*octave*. De ces trois cordes les deux qui sont l'une à l'autre en longueur comme 6 est à 4 ou 3 est à 2, la plus courte fera trois vibrations contre deux de la plus longue ou 6 contre 4, c'est cet accord qu'on nomme *la quinte*. Enfin deux de ces cordes dont les longueurs seront entr'elles comme 4 & 3 étant pincées ensemble ou successivement, la plus courte fera quatre vibrations dans le tems que la plus longue n'en fera que trois, cet accord se nomme *la quarte*. On voit donc que ces trois nombres 3, 4, 6, expriment la proportion qui fait les principaux accords de la musique; c'est pour cette raison que cette proportion se nomme *harmonique*; sa principale propriété est que le premier terme est au 3ᵉ géométriquement comme le 2ᵉ terme moins le premier est au 3ᵉ moins le second. On a en effet 3 : 6 : : 4 — 3 : 6 — 4 : : 1 : 2.

499. DÉF. D'après le principe précédent, toute proportion harmonique est composée de trois nombres qui vont en augmentant ou en diminuant; 1°. s'ils vont en diminuant, il faut pour qu'ils soient en proportion harmonique que le premier soit au 3ᵉ géométriquement, comme le premier moins le second est au second moins le 3ᵉ; les nombre 12, 8, 6 sont en proportion harmonique, parce que 12 : 6 : : 12 — 8 : 8 — 6 : : 4 : 2 : : 2 : 1; si les trois nombres de la proportion harmonique vont en augmentant, il faut que le premier soit au 3ᵉ géométriquement comme le second moins le premier est au 3ᵉ moins le second; 3, 4, 6 sont en proportion harmonique, parce que 3 : 6 : : 4 — 3 : 6 — 4 : : 1 : 2. C. Q. F. B. R.

500. PROB. Déterminer 1°. le 3ᵉ terme d'une proportion harmonique croissante ; 2°. le 3ᵉ terme d'une décroissante ; 3°. le terme moyen dans l'un & l'autre cas, les deux extrêmes étant données.

SOLUTION. J'exprime par x le terme inconnu. Si 3 & 4 sont les deux premiers termes donnés, il faut que les trois nombres 3, 4, x forment une proportion harmonique croissante ; on aura donc cette proportion géométrique (499) $3 : x :: 4 - 3 : x - 4$, ou $3 : x :: 1 : x - 4$, d'où (207) $3x - 12 = x$, corrigeant, transposant & divisant par 2, on aura $x = 6$; on aura donc cette proportion harmonique croissante 3, 4, 6 qui donne cette analogie $3 : 6 :: 4 - 3 : 6 - 4 :: 1 : 2$. C. Q. F. 1°. Dét.

2°. Si 12 & 8 sont les deux premiers termes de la proportion harmonique décroissante, on aura pour les trois nombres 12, 8, x qui donneront cette analogie, $12 : x :: 12 - 8 : 8 - x$, ou $3 : x :: 1 : 8 - x$, d'où $x = 24 - 3x$, ou $4x = 24$, d'où $x = 6$; donc, &c. C. Q. F. 2°. Dét.

3°. Si 24 & 12 sont les extrêmes d'une proportion harmonique, on aura pour ses 3 termes 24, x, 12 qui donneront cette analogie $24 : 12 :: 24 - x : x - 12$ ou $2 : 1 :: 24 - x : x - 12$, d'où $2x - 24 = 24 - x$, transposant on aura $3x = 48$, d'où $x = 16$. On aura donc pour les trois termes de la proportion harmonique 24, 16, 12 ; en effet ils donnent cette analogie, $24 : 12 :: 24 - 16 : 16 - 12 :: 8 : 4 :: 2 : 1$. C. Q. F. 3°. Dét.

501. On déduit de ce qui précede cette belle propriété de la proportion harmonique, que si on multiplie ou divise chacun de ses termes par

un nombre quelconque, les produits ou les quotiens forment une proportion harmonique; *par exemple*, si on multiplie les termes de la proportion harmonique 3, 4, 6 par le nombre 3, on aura 9, 12, 18 qui seront en proportion harmonique; car 9 : 18 :: 12 — 9 : 18 — 12 :: 3 : 6 :: 1 : 2; on voit de même que si on divise par 3, on aura 1, $\frac{4}{3}$, 2, qui seront en proportion harmonique; car 1 : 2 :: $\frac{4}{3}$ — 1 : 2 — $\frac{4}{3}$ :: $\frac{4-3}{3}$: $\frac{6-4}{3}$ :: 1 : 2. Ainsi des autres. C. Q. F. B. R.

502. THÉOR. Dans toute proportion arithmétique croissante ou décroissante, le premier terme multiplié par le second, le premier terme multiplié par le 3e, & le second terme multiplié par le 3e, donnent trois nombres en proportion harmonique.

1°. Soit cette proportion arithmétique continue ÷ 2, 5, 8 : *à dém.* que 2 × 5; 2 × 8; 5 × 8 sont 3 nombres en proportion harmonique. Si cela est vrai, il faut (496) qu'on ait cette proportion géométrique 2 × 5 : 5 × 8 :: 2 × 8 — 2 × 5 : 5 × 8 — 2 × 8. Or cela est; car en divisant les antécédens par 2, & les conséquens par 8, on a . . . .
5 : 5 :: 8 — 5 : 5 — 2 où 5 : 5 :: 3 : 3; or ces nombres sont aussi en proportion géométrique; donc aussi on a cette proportion géométrique 2 × 5 : 5 × 8 :: 2 × 8 — 2 × 5 : 5 × 8 — 2 × 8, ou 10 : 40 :: 6 : 24. Ainsi les trois nombres 2 × 5, 2 × 8, 5 × 8, ou 10, 16, 40 sont en proportion harmonique.

On démontrera par un semblable procédé qu'il en est de même, si la proportion continue arithmétiquement est décroissante. Donc, &c. C. Q. F. Dét.

503. DÉF. Si plusieurs nombres qui vont en augmentant ou en diminuant sont tels que 3 de ces nombres pris de suite forment une proportion harmonique, la suite de tous ces termes est une *progression harmonique*.

504. THÉOR. Si on divise le même nombre par trois diviseurs qui soient en progression arithmétique, les quotiens successifs formeront une proportion harmonique.

Si on divise 24 par les termes de cette progression arithmétique ÷ 2, 3, 4, les quotiens 12, 8, 6, seront en proportion harmonique. Si cela est, il faut démontrer que 12 : 6 :: 12 — 8 : 8 — 6.

DÉM. On a $\frac{24}{2} = 12$, $\frac{24}{3} = 8$, $\frac{24}{4} = 6$. Mais lorsqu'on divise un même nombre par des diviseurs différens, les quotiens sont réciproquement proportionnels aux diviseurs (216), on aura donc,

1°. 12 : 8 :: 3 : 2, d'où 12 — 8 : 8 :: 3 — 2 : 2 :: 1 : 2,
2°. 8 : 6 :: 4 : 3, d'où 8 : 8 — 6 :: 4 : 4 — 3 :: 4 : 1,

multipliant ces deux analogies terme par terme, & simplifiant les rapports, on aura 12 — 8 : 8 — 6 :: 4 : 2; mais on a aussi (216) cette analogie 12 : 6 :: 4 : 2; donc en rapports égaux, on aura 12 : 6 :: 12 — 8 : 8 — 6; donc les nombres ou quotiens 12, 8, 6 sont en proportion harmonique. C. Q. F. Dém.

505. Donc en général, si on divise un nombre quelconque par une suite de nombres en progression arithmétique, les quotiens pris de suite formeront une progression harmonique; ainsi si on divise 60 par les nombres de cette progression arithmétique . . . .

1, 2, 3, 4, 5, 6, les six quotiens 60, 30, 20, 15, 12, 10 sont en progression harmonique; car trois de ces nombres pris de suite à volonté, tels que, 1°. 60, 30, 20; 2°. 30, 20, 15; 3°. 20, 15, 12; 4°. 15, 12, 10 sont en proportion harmonique (504); en effet on a,

1°. 60 : 20 :: 60 — 30 : 30 — 20 :: 30 : 10;
2°. 30 : 15 :: 30 — 20 : 20 — 15 :: 10 : 5;
3°. 20 : 12 :: 20 — 15 : 15 — 12 :: 5 : 3;
4°. 15 : 10 :: 15 — 12 : 12 — 10 :: 3 : 2;
C. Q. F. B. R.

506 D'où il suit qu'on formera aisément autant de progressions harmoniques qu'on voudra, & d'un nombre de termes à volonté, en choisissant un nombre divisible par autant de termes d'une progression arithmétique quelconque; les quotiens seront en progression harmonique.



SUPPLÉMENT au N°. 4.

INDÉPENDAMMENT de ces dix caracteres ou chiffres qu'emploie l'Arithmétique, & qu'on appelle *Arabes*, il y a d'autres caracteres appellés *Romains*, dont on se sert aussi quelquefois pour exprimer les nombres. On en joint ici une Table, avec leur valeur en chiffres Arabes.

I	1	XX	20
II	2	XXX	30
III	3	XL	40
IV ou IIII	4	L	50
V	5	LX	60
VI	6	LXX	70
VII	7	LXXX	80
VIII	8	LXXXX ou XC	90
IX	9	C	100
X	10	CX	110
XI	11	CL	150
XII	12	CC	200
XIII	13	CCC	300
XIV	14	CCCC ou CD	400
XV	15	D ou un Ↄ	500
XVI	16	M ou CIↃ	1000
XVII	17	MD	1500
XVIII	18	M M	2000
XIX	19	&c.	

On voit que dans les chiffres Romains l'unité est représentée par un trait vertical, les 5 unités par un V, la dixaine par un X, les cinq dixaines par un L, le cent par un C, cinq cents par un D, & mille par un M. Au moyen de ces 7 carac-

teres, on exprime les différens nombres, en marquant à la droite d'un de ces caracteres ceux qu'on veut y ajouter, ou à la gauche celui qu'on veut en retrancher; ainsi IV signifie 5 — 1 ou 4, VI signifie 5 + 1 ou 6; M. DCC. LXXXI, signifie 1781.



DÉFINITION *à substituer à celle de la Regle de Trois simple & inverse, donnée page 214.*

La Regle de Trois est *indirecte* ou *inverse*; lorsqu'on reconnoît par l'état de la question que dans les trois termes donnés, les deux termes *correspondans* ou *relatifs* (1) sont réciproques au terme qui est seul & à celui qu'on cherche. Dans ce cas, le terme qui est seul forme le premier terme de la proportion, & les deux autres les moyens. On reconnoît que les deux termes correspondans ou relatifs sont réciproques au terme qui est seul & à son relatif qu'on cherche, toutes les fois que les deux termes relatifs connus ont produit le même effet ou ont la même cause, que doivent produire ou avoir le terme qui est seul & le terme inconnu.

Ce qui a fait donner à cette regle le nom d'*inverse*, c'est que dans la proportion qu'il faut faire pour résoudre la question, les deux termes d'une des causes ou effets, sont *réciproques* à ceux de l'autre cause ou effet.

(1) On appelle ici termes *relatifs* les deux termes qui ont ensemble produit un effet, ou qui au contraire constituent à eux deux l'effet d'une cause donnée.

FIN.

MÉMOIRE

SUR

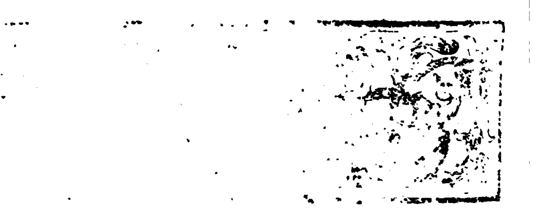
LES LOGARITHMES

DES QUANTITÉS NÉGATIVES

Par L. C. V. T R I N C A N O,

Docteur Aggrégé de la Faculté de Droit de Paris, Pensionnaire du Roi, Maître de Mathématiques en survivance des Pages de la Chambre de Sa Majesté, & de ceux de la Reine.







MÉMOIRE

SUR LES LOGARITHMES

DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

I. Les logarithmes ſont des nombres en progreſſion arithmétique, qui répondent terme pour terme à d'autres nombres en progreſſion géométrique.

II. On voit d'après cette définition que ni l'une ni l'autre de ces progreſſions n'étant déterminée, les logarithmes peuvent être variés à l'infini.

III. Je ne parlerai point des différentes formes de la progreſſion arithmétique; étant pouſſée à l'infini dans l'un & l'autre ſens elle ſe réduira toujours à cette forme.

$$-\infty \ldots -2, -1, 0, +1, +2 \ldots \infty.$$

IV. Pour la progreſſion géométrique, j'en diſtinguerai deux eſpeces : celle dont la raiſon eſt poſitive, & celle où elle eſt négative. Les termes de la premiere auront tous le même ſigne : ceux

de la seconde auront alternativement les signes + & —. Dans l'un & l'autre de ces cas on peut distinguer encore deux espèces, suivant que le premier terme est ou positif ou

Les deux progressions $\left\{\begin{matrix} +2, +4, +8, +16, \\ -2, -4, -8, -16, \end{matrix}\right\}$ ont un exposant positif + 2.

Les deux progressions $\left\{\begin{matrix} +2, -4, +8, -16, \\ -2, +4, -8, +16, \end{matrix}\right\}$ ont un exposant négatif — 2.

V. Il est évident, si l'on prend pour la progression géometrique l'une des trois dernieres, que les quantités négatives comprises dans ces progressions auront des logarithmes réels, puisqu'on peut faire répondre ces progressions à telle progression arithmétique que l'on voudra.

VI. Mais il reste à savoir si dans le cas, où l'on prendroit pour progression géométrique la premiere des progressions ci-dessus, les quantités négatives auroient des logarithmes réels: c'est l'objet de ce Mémoire; & il est bien évident que s'il n'est point possible que la progression ait pour un de ses termes une grandeur négative, le logarithme de cette grandeur impossible sera un être chimérique. Or en poursuivant la progression + 2, + 4, + 8, + 16, dont la raison est + 2, tant d'un côté que de l'autre, on aura $\frac{1}{4}$ . . . . . . $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 . . . . . . ∞, & aucun de ces termes ne sera négatif. Ce raisonnement est

très-simple & très-clair; on peut cependant y faire les deux objections ci-après.

VII. 1°. *On sait qu'une grandeur a deux moyens de devenir de positive négative, en passant ou par o, ou par ∞ : ne peut-il pas se faire ici que la progression après être parvenue à ∞, devienne négative & revienne sur ses pas ?*

VIII. A cela, je réponds : il est vrai qu'une grandeur peut devenir de positive négative en passant par ∞; on en a l'exemple dans les sous-tangentes du cercle, mais il ne s'ensuit pas de-là que toute grandeur qui va à l'infini devienne après cela négative. C'est ainsi que dans les problêmes *de maximis & minimis*, on a la solution en faisant la différentielle tantôt = o, tantôt = ∞, & non pas toujours par l'une & par l'autre hypothese. Or je crois très-affirmativement que c'est ici l'un des cas où la grandeur ne devient pas négative en passant par ∞. Car par la nature de la progression, chaque terme est une partie quelconque, le tiers, le quart, par exemple du terme suivant, & il est impossible que trois ou quatre fois une grandeur positive infinie égale une quantité négative, c'est-à-dire, moins que rien (1).

(1) Dans un Mémoire sur les quantités négatives, que l'Auteur avoit précédemment envoyé à l'Académie d'Angers, il avoit fait voir qu'il faut distinguer deux sortes de

IX. On peut objecter 2°. *qu'il est un moyen d'insérer des termes négatifs dans cette progression en introduisant une moyenne proportionnelle entre deux termes consécutifs, laquelle moyenne proportionnelle sera également positive & négative.*

X. On peut faire deux réponses à cette objec-

---

quantités négatives, les unes géométriques, les autres arith. & il démontroit qu'à strictement parler les quantités négatives arith. étoient moindres que le zéro absolu. L'Académie dans son jugement sur ce Mémoire & sur un autre qu'il lui avoit en même tems envoyé sur les forces *d'inertie* & de *pression*, lui demanda comment il *expliquoit, conformément à ses idées, que ces quatre quantités* — 1, + 2, + 2, — 4, *forment une proportion géométrique continue.*

M. d'Alembert, dans son Mémoire sur les logarithmes des quantités négatives, attaquant aussi cette définition des quantités négatives employée par plusieurs Géomètres (entre autres par *Wallis*, & par l'Auteur du traité complet d'Arithmétique, *pages* 100 & 411) objecte aussi une pareille proportion 1 : — 1 :: — 1 : 1, dans laquelle le produit des extrêmes égale le produit des moyens : « cependant, dit M. d'Alembert, *page* 201, si » on regardoit les quantités négatives comme au-dessous » de zéro, 1 seroit > — 1, & — 1 < 1; ainsi il ne pour- » roit y avoir de proportion ». A cela on pourroit répondre, selon l'opinion de Leibnitz, qu'il n'y a pas proportion, non pas « parce que, comme ajoute M. d'Alem- » bert qui le cite, les grandeurs négatives entrent dans le » calcul sans entrer dans les rapports », mais parce que, comme le dit lui-même ce grand homme *tom. III* de ses Œuvres, *page* 439 : *Identitatis rationum verarum fundamentum est rerum similitudo . . . undè mihi videntur . . . veras illas rationes non esse, in quibus quantitas nihilo minor est antecedens vel consequens, & si in calculo hae, ut aliae imaginariae, tutò & utiliter adhibeantur.* En effet dans les rapports géométriques on considere combien de fois un antécédent contient son conséquent, ou y est contenu :

tion. La premiere est qu'on ne peut admettre à la fois deux progressions géométriques dans le même systême de logarithmes ; & que si on admet celle que donne la moyenne proportionnelle positive, la difficulté restera dans toute sa force ; que si au contraire on prend la racine négative

---

or une quantité positive ne renferme point la quantité négative qui lui sert de conséquent, ni n'est point renfermée dans elle. C'est ainsi que le zéro absolu, qui peut être un terme d'une progression arithmétique, ne peut point entrer dans les rapports géométriques. En vain M. d'*Alembert* objecte-t-il l'ordonnée négative de la parabole qui est, ainsi que la positive, moyenne proportionnelle entre le parametre & l'abscisse, puisque cette définition (selon la distinction de l'Auteur de ce Mémoire) ne peut s'appliquer qu'aux quantités négatives arithmétiques.

Mais négligeant cette raison de *Léibnitz*, quoique vraie, l'Auteur de ce Mémoire répond à l'Académie d'Angers & à M. d'*Alembert*, que ce principe, qu'il ne peut y avoir le même rapport du plus au moins, que du moins au plus, n'est vrai que lorsqu'il s'agit de grandeurs de même nature ; c'est à dire, d'une proportion dont les termes sont tous quatre positifs, ou tous quatre négatifs, ou bien au moins dans laquelle les deux termes de chaque rapport ont le même signe : ainsi il est vrai dans les proportions $1 : 2 :: 3 : 6$, $-1 : -2 :: -3 : -6$, $1 : 2 :: -3 : -6$, il est même vrai dans les proportions $1 : -3 :: 2 : -6$, qui est la précédente dont on n'a fait que changer les moyens ; mais il n'est point général pour tous les cas des rapports géométriques où les quantités négatives sont comparées aux positives ; car si l'on dispose en proportion ces quatre termes a, $a - 2a$, $b - 2b$, & b, on aura le produit des extrêmes ab égal à celui des moyens $ab - 4ab + 4ab$, & cependant on ne peut nier que a, ne soit plus grand que a après qu'on en a ôté $2a$, & au contraire que $b - 2b$ ne soit plus petit que b dont on n'a rien ôté.

alors on rentrera dans les deux dernieres formes de progressions géométriques sur lesquelles il n'y a point de contestations (1).

(1) Cette objection tirée des deux racines d'un quarré quelconque, est la plus spécieuse, & la plus souvent opposée. M. d'*Alembert*, ainsi que l'avoit fait *Bernoulli*, la répete en lignes: & traçant une logarithmique, y tirant deux ordonnées, & prenant sur l'axe un point intermédiaire, il tire par ce point une moyenne proportionnelle en dessus & en dessous de l'axe, c'est-à-dire, positive & négative: cette construction faite, il montre que la partie de l'axe répond à la fois à l'ordonnée positive & à la négative; d'où, conclut-il, le même logarithme répond à deux nombres différens. On en conviendra sans peine, mais il s'agit de savoir si c'est dans le même systême de logarithmes: car on sait en général que le même axe peut servir à un nombre infini de logarithmiques; ainsi ce ne seroit rien démontrer que de faire voir vaguement que la même ligne répond à différentes ordonnées. Il faut donc examiner si cette moyenne proportionnelle négative entre dans le même systême de logarithmes dans lequel sont placées les deux ordonnées, entre lesquelles elle est moyenne proportionnelle: ou, ce qui revient au même, si la logarithmique qui répond à ces deux ordonnées, passe intermédiairement par l'extrémité de cette moyenne proportionnelle négative. Or la seule inspection de la figure rend incontestable qu'une courbe qui traverseroit son axe pour aller de la premiere ordonnée positive à la moyenne proportionnelle négative, & qui le traverseroit encore pour revenir de celle-ci à la deuxieme ordonnée positive, ne seroit point une logarithmique. Donc, d'après l'objection même de M. d'*Alembert*, il devient certain que la moyenne proportionnelle négative ne peut convenir au même systême de logarithmes dans lequel sont renfermées les deux ordonnées positives. On en voit dans le n°. XI & XII de ce Mémoire, la raison tirée de la nature même des logarithmes.

Il faut à la vérité convenir avec *Bernoulli* qu'on peut, de l'autre côté de l'axe d'une logarithmique, décrire une

XI. On peut encore répondre qu'il est des cas où les deux racines de l'équation du deuxieme degré ne satisfont point l'un & l'autre au problême dont la solution dépend de cette équa-

autre logarithmique qui lui soit parfaitement égale, qui par conséquent aura ses ordonnées égales, & qu'on pourra en les considérant par rapport à la premiere logarithmique les appeller $-y$. Cela ne fait rien du tout à la question, puisqu'on sait bien qu'on peut mener sur le même axe une infinité de logarithmiques différentes; & ces $-y$ ne seront point les ordonnées de la premiere logarithmique, mais seulement celle de la seconde, c'est-à-dire, celles d'un systême de logarithmes où l'on prend o, pour le logarithme de -1, & où la raison de la progression géométrique est positive.

Il faut remarquer d'ailleurs, qu'on ne peut rien conclure des résultats que donne la construction des équations, relativement aux opérations que l'on peut faire sur les nombres, & encore moins (comme l'ont peut-être trop fait MM. *Bernoulli*, *Euler*, d'*Alembert* & de *Foncenex*), de ce qui arrive dans une courbe transcendante ou non, à ce qui doit arriver dans une autre courbe: c'est ainsi par exemple que le calcul ne peut assigner une valeur exacte de $\sqrt{2}$, & que la diagonale d'un quarré donne avec précision le côté que représente ce radical.

On peut en montrer encore un exemple frappant dans la question présente, mais où, au contraire, les lignes ne donnent pas tout ce que donne le calcul. On a vu dans le commencement de cette note que la logarithmique dont les ordonnées étoient toutes positives représentoit le systême de logarithmes dans lequel le premier terme & la raison de la progression géométrique sont positifs; on a vu dans le deuxieme alinéa que son égale de l'autre côté de l'axe représenteroit le systême de logarithmes dans lequel le premier terme seroit négatif & la raison positive; mais il y a deux autres cas développés n°. IV & V de ce Mémoire, dans lesquels la raison étant négative, les termes de la progression sont alternativement

tion; & qu'on se croit fondé à dire, que c'est ici l'un des cas où la solution négative ne va point.

XII. En effet, si c'étoit deux progressions géométriques qu'on fît correspondre l'une à l'autre, il seroit permis sans doute de prendre les deux racines, parce que l'autre progression donneroit aussi deux valeurs pour la moyenne proportionnelle: mais il n'en est point de même ici; c'est une progression arithmétique qu'on fait correspondre à une géometrique, & elle ne donne point, comme cette derniere, deux valeurs pour la moyenne proportionnelle. Cette moyenne proportionnelle arithmétique est toujours (lorsque les deux termes ont le même signe), de la même espece que les termes extrêmes: donc aussi l'on doit prendre pour son terme correspondant, la moyenne proportionnelle géométrique qui est de même espece que les deux termes entre les-

---

positifs & négatifs. Dans ces deux cas il y a deux systêmes de logarithmes très-réels, & cependant on ne peut les représenter par des logarithmiques, puisque (comme je l'ai déjà fait remarquer vers la fin du premier alinéa de cette note), une courbe qui couperoit à chaque instant son axe pour aller de l'extrémité d'une ordonnée positive à une négative, & réciproquement, qu'une telle courbe dis-je, ne seroit pas une logarithmique.

Il est donc bien essentiel dans ces sortes de discussions de se défier de l'étendue de ses connoissances, & de ramener toujours la question à ses élémens.

quels on l'insere, c'est-à-dire, dans notre hypothese, la racine positive.

XIII. Vainement objecteroit-on que mon raisonnement n'est pas exact, si les deux termes entre lesquels on prend la moyenne proportionnelle arithmétique sont l'un négatif & l'autre positif. Car au moins elle est toujours ou positive ou négative, & jamais l'un & l'autre à la fois, comme la moyenne proportionnelle géométrique (1).

---

(1) D'ailleurs dans la supposition d'une progression arithmétique, dans laquelle deux termes l'un négatif l'autre positif répondroient à deux nombres au-dessus de l'unité, dans la progression géométrique, les propriétés des logarithmes n'auroient plus lieu.

Ainsi, *par exemple*, si on fait répondre à la progression géometrique,

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, la prog. arith.
— 3, — 2, — 1, 0, + 1, + 2, + 3.

La somme 0 des logarithmes — 1 & + 1, de 4 & de 16, n'est point le logarithme du produit 64 de ces deux nombres.

Il faut de même observer que dans le cas des progressions géométriques dans lesquelles — 1 est le premier terme, la somme des logarithmes de 2 nombres ne donne pas le logarithme qui répond au produit des 2 nombres. Soient par exemple, les deux progressions,

— 1, — 2, — 4, — 8, — 16, } auxquels on fait ré-
+ 1, + 2, — 4, + 8, — 16, } pondre la prog. arith.

0, + 1, + 2, + 3, + 4:

le double 4, du logarithme 2, de — 4, répond à — 16 & non pas au quarré + 16 de cette grandeur.

Ainsi (contre le sentiment de M. d'*Alembert*) Ber-

XIV. Le raisonnement par lequel je prouve l'impossibilité des logarithmes des quantités négatives, d'après la nature même de la progression, reste donc dans toute sa force, & je ne crois pas qu'on puisse lui opposer aucune autre objection raisonnable. On pourra appliquer également ce raisonnement à la progression toute négative — 2, — 4, — 8, — 16, &c. & on trouvera :

1°. Que dans la supposition d'une progression géométrique dont le premier terme & la raison sont positifs, le logarithme d'une quantité négative est chimérique.

2°. Que dans la supposition d'une progression dont le premier terme est négatif & la raison positive, le logarithme d'un nombre positif n'existe pas.

---

noulli avoit raison de nier que dans son hypothèse de o, le logarith. de — 1, $\sqrt{-2}$ fût la moitié du log. de — 2; & *Léibnitz* lui-même n'avoit pas pris garde à cette différence, lorsqu'il prétendoit le prouver, en disant que $\sqrt{-2}$ est moyen proportionnel entre + 1 & — 4 : puisque dans l'hypothèse de *Bernoulli*, + 1 n'avoit point de logarithme possible, comme on le voit développé dans le second cas du N° XIV de ce *Mémoire*.

On peut voir dans les n°. 306, 307 & suivans, *du Traité complet d'Arithmetique*, pourquoi les propriétés des logarithmes ne sont communes qu'aux systêmes dans lesquels on donne à + 1, zéro pour logarithme.

Les progressions qui ont une raison négative ont cela de particulier, qu'on ne peut pas y intercaler de termes au moyen des extractions de racines : parce que tous ces termes seroient imaginaires.

XV. Au raisonnement ci-dessus, qui prouve incontestablement ce que j'avance, j'ajouterai une autre raison très-solide de *Léibnitz*.

XVI. On sait que dans un systême de logarithme quelconque dans lequel $l. + 1 = 0$, l'addition des logarithmes de deux nombres donne pour somme le logarithme du produit de ces deux nombres, que leur soustraction donne le logarithme du quotient du premier nombre par le deuxieme, &c.

XVII. *Léibnitz* ayant pris garde à ces propriétés des logarithmes, fait le raisonnement suivant. Un nombre négatif quelconque n'est autre chose qu'un nombre positif moins un plus grand : ainsi le nombre — 16, *par exemple*, n'est autre chose que le nombre + 16 moins un plus fort 32; or on sait que pour multiplier 16 par 32, il faut ajouter le logarithme de 16 à celui de 32; que pour diviser 16 par 32 il faut ôter le logarith. de 32 de celui de 16; mais quelle opération faut-il faire sur les logarith. de 16 & de 32 pour avoir celui de + 16 — 32 ? Et si l'on convient qu'aucune opération ne peut le produire, il faut avouer aussi que ce logarithme est impossible à déterminer (1). Ce raisonnement est très-simple

(1) Cette objection paroît à l'Auteur, être de la plus grande force, & il croit qu'on ne pourra soutenir l'existence des logarithmes des quantités négatives dans le

& l'on ne pourra jamais le réfuter solidement, sans indiquer quelle est cette opération sur les logarith-

---

système ordinaire, que quand on y aura répondu. *Bernoulli* a trouvé plus facile de la passer sous silence que d'y répondre ; & M. d'*Alembert* a mieux aimé dire qu'il ne l'avoit pu bien comprendre que de s'engager à la réfuter, » il peut (le raisonnement de Léibnitz) servir d'exem- » ple, dit-il, *page* 208, entre plusieurs autres, de l'abus » qu'il est aisé de faire de la métaphysique dans la géo- » métrie ». Voici le raisonnement de Léibnitz. *Cæterum ipsa harmonia logarithmorum & numerorum hæc illustrat. ductio in se ipsum in numeris repræsentatur per multiplicationem in logarithmis ; multiplicatio in numeris repræsentatur per additionem in logarithmis ; positio in numeris repræsentatur per logarithmum.*

ipsi n^e *respondet* e *log.* n
nn *log.* n + *log.* n̄
n *log.* n

Contra extractio in numeris repræsentatur per divisionem in logarithmis, divisio in numeris repræsentatur per substractionem in logarithmis. Sed per quid repræsentatur negatio in numeris ? Respondeo id non posse inveniri, quia in descendendo ab extractione per divisionem & substractionem non potest inveniri quod fit substractione inferius.

ipsi $\sqrt[e]{n}$ *respondet* *log.* n ✱ e
n ✱ n *log.* n — *log.* n
quid ?

Ce ne sont surement pas là de pures abstractions métaphysiques C'est une impossibilité démontrée, d'indiquer aucune opération pour trouver le logarithme des quantités négatives, & cela d'après l'énumération exacte de toutes les opérations que l'on peut faire, & dont aucune ne mene aux quantités négatives. Du moins on laisse au Lecteur à juger si l'on satisferoit à la demande de Léibnitz, en disant avec M. d'*Alembert*, « qu'après avoir » descendu jusqu'à la soustraction on revient ensuite » sur ses pas, pour retomber dans les logarithmes po- » sitifs ? »

mes qui répond à la soustraction des nombres naturels. Dira t-on que le logarithme de 16—32, est le même que celui de 16, avant d'en avoir ôté 32? Ce seroit une absurdité, & c'est cependant ce qu'il faut soutenir, si l'on prétend pouvoir insérer au moyen des extractions de racine, deux moyennes proportionnelles géométriques, l'une positive & l'autre négative, qui répondent l'une & l'autre au même logarithme.

XVIII. Cette matiere si claire lorsqu'on veut s'en tenir aux notions les plus simples, & à la nature des progressions, sans chercher à se servir des connoissances les plus étendues pour obscurcir par des calculs compliqués jusqu'à l'évidence même, causa entre les plus fameux Géometres du siecle dernier & de ce siecle, des disputes qui n'ont roulé que sur des équivoques. Ces disputes cependant ont occasionné bien des objections & des dissertations savantes que nous allons rapporter, en faisant voir comment une explication bien nette de l'opinion qu'on soutenoit eût ramené tous les Savans au même avis (1).

---

(1) C'est à peu près dans cet état que se trouvoit ce Mémoire, lorsque des changemens arrivés dans différentes parties de l'Administration engagerent son Auteur,

très-jeune encore, à se livrer entiérement à l'étude des Loix qu'il avoit déjà commencée pour sa satisfaction particuliere. Il avoit depuis cette époque absolument oublié cette Dissertation. Quelques morceaux du *Traité complet d'Arithmétique* de son pere, qui s'imprimoit sous ses yeux & par ses soins, lui ont rappellé ses premieres idées. Il auroit bien desiré continuer ce Mémoire, mais le peu de tems qu'il se trouvoit avoir à lui, pour ne point retarder l'impression de l'Ouvrage, & les occupations sérieuses de son état qui le pressoient dans ce moment là plus que dans aucun autre tems de l'année, l'ont mis dans l'impossibilité de l'achever. Quelques notes qu'il a cru essentielles, & qui ne demandoient pas un travail continu, sont la seule chose qu'il ait pu y ajouter. Il va en peu de mots rendre compte dans celle-ci de l'historique de ces disputes.

La premiere qui s'éleva fut entre l'immortel *Léibnitz* & le célebre *Bernoulli*; après plusieurs lettres, dans lesquelles le Philosophe ramenoit sans cesse la question à ses élémens, tandis que le Mathématicien au contraire cherchoit toujours à la noyer dans des inductions tirées de la géométrie transcendante, ils ont fini par convenir que tout dépendoit du systême de logarithmes que l'on choisiroit. *Léibnitz* en effet écrivoit ainsi à *Bernoulli* dans sa derniere lettre sur cette matiere: *concessisti si sit* $a^e = x$, *& posito* $e = 0$, *fit* $x = 1$; *non posse dari* e *posito* $x = -1$, *hoc mihi sufficit; nec aliud intelligo cum dico non dari logarithmum negativorum numerorum*); & telle fut la réponse de *Bernoulli*: *per me licet*, dit-il; lettre 208e, *definire logarithmum pro arbitrio tuo; modo non neges* (*quod ab initio concessisti*) *assumptionem unitatis affirmativæ pro primo numero esse arbitrariam; adeoque licere unitatem negativam pro primo numero adhibere, ut scilicet suponatur* $\log - 1 = 0$, ... *nec tamen indè quod metuis sequatur, impossibilium quantitatum fore possibiles logarithmos.* Ces derniers mots de *Bernoulli* sont absolument contraires à ce qu'a soutenu depuis M. d'*Alembert*: « qu'on peut prouver par la logarithmique même, que les logarithmes des quantités imaginaires peuvent être réels ». *Voyez ses opuscules Mathématiques*, *Tome* 1, *page* 195.

La même dispute s'éleva depuis en 1747 & 1748, entre M. *Euller* qui soutenoit l'avis de *Léibnitz*, & M. d'*Alembert*

bert qui renouvella les assertions de *Bernoulli* pour la possibilité des logarithmes des quantités négatives, & les fortifia de nouvelles objections.

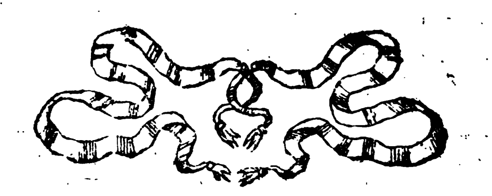
Cette seconde dispute donna lieu à un Mémoire de M. *Euler* à l'Académie de Berlin, imprimé en 1751, & à un Mémoire en réponse de M. d'*Alembert*, qui est imprimé dans le tome premier de ses Opuscules Mathématiques.

M. le *Chevalier Daviet de Foncenex* fortifia depuis le sentiment de M. *Euller* par de nouvelles preuves, dans un Mémoire publié dans le premier volume des Mémoires de la Société des Sciences de Turin : & M. d'*Alembert* lui répondit dans un Supplément à son premier Mémoire.

Il seroit vraiment curieux de suivre ces fameux Mathématiciens dans une contestation si fortement soutenue de part & d'autre, & où l'on emploie pour démontrer les contraires, toutes les ressouces du génie & les connoissances les plus vastes, dans une science où tout doit être rigoureusement démontré : l'Auteur de ce Mémoire se trouvant dans l'impossibilité de donner à cette occupation tout le tems qu'elle exige, se bonnera à observer :

1°. Que M. d'Alembert semble lui-même avouer, que dans l'hypothèse du systême de logarithmes usité, les quantités négatives n'ont point de logarithmes, en affectant par-tout de dire, non pas que les quantités négatives ont toujours des logarithmes, mais que les logarithmes de ces quantités *peuvent être supposés réels*, en disant, nommément *p.* 196, que si dans le rapport, $\sqrt{-1}$ à $4\,l.\sqrt{-1}$ du rayon à la circonférence, « $l.\sqrt{-1}$ n'est pas o, mais » imaginaire, cela vient du systême de logarithmes que » l'on suppose dans l'équation entre les arcs de cercle z » & leurs sinus x », (c'est-à-dire du systême usité); & en finissant par dire, *page* 209, « Ils (*Leibnitz* & *Bernoulli*) se seroient, ce me semble, expliqués plus clairement, en convenant que tout systême de logarithmes » est arbitraire; c'est pour cette raison que les logarithmes des quantités négatives peuvent être, ou réels, » ou imaginaires, selon le systême des logarithmes que » l'on choisit ».

2°. Que cependant il a bien entendu soutenir la possibilité des logarithmes des quantités négatives dans le cas d'une progression géométrique, dont le premier terme & la raison sont positifs ; puisqu'il dit, *page* 187, « un » pareil énoncé fera entièrement disparoître la difficulté » tirée de l'impossibilité des quantités négatives dans la » progression géométrique o, (ou plutôt $\frac{1}{\infty}$) 1, 2, 4, &c ». Et que pour soutenir cet avis, il ajoute, immédiatement après, « difficulté d'ailleurs illusoire, puisque les ordon» nées de la logarithmique formant une suite continue » & non interrompue depuis o (c'est-à-dire depuis $\frac{1}{\infty}$) » jusqu'à l'infini, ne constituent pas plus une progression » géometrique, qu'une autre progression quelconque ». Mais malgré l'assertion de M. d'*Alembert*, comment se refuser à reconnoître que dans le cas de cette suite continue, les abscisses forment une progression arithmétique, & que par conséquent les ordonnées sont en progression géométrique? Car, selon la définition qu'il en donne lui-même, *page* 182, « la logarithmique... *est* une courbe » dans laquelle les ordonnées..... étant supposées en » progression géometrique, les abscisses correspondan» tes .... sont en progression arithmétique ». Ils devient donc évident que les ordonnées de toute logarithmique forment une progression géométrique, & qu'ainsi le raisonnement tiré de l'impossibilité d'insérer un terme négatif dans une telle progression, loin d'être *illusoire* comme le prétend M. d'*Alembert*, reste au contraire dans toute sa force.



SUPPLÉMENT.

Note dont le renvoi devroit être placé après ces mots : où elle (la raison) est négative, N°. IV. du Mémoire.

PENDANT l'impression de ce Mémoire un Mathématicien célebre, à qui l'Auteur l'avoit montré, lui envoya une objection qui porte sur les deux especes de progression dont la raison est négative. Comme cette objection très-forte se présente assez naturellement à l'esprit, & qu'il n'y a presque rien dans son Mémoire sur ces deux especes de progressions, il a cru, d'après le conseil d'un de ses amis, devoir l'ajouter à son Mémoire, ainsi que la réponse qu'il y a faite, & dont le Mathématicien qui avoit proposé l'objection a paru satisfait.

Cette objection ayant été très-bien présentée, il va rapporter les termes mêmes dans lesquels elle étoit conçue.

OBJECTION... *Mais M. Trinçano permettra-t-il à M. *** de lui faire une observation sur une chose qu'il a lue dans le commencement du Mémoire ? Il ne conçoit pas comment l'exposant d'une raison peut être négatif, & il craint fort que cela ne lui soit point passé. La progression résultante d'un pareil exposant me semble prouver l'impossibilité d'une pareille supposition ; car on ne peut pas dire que les deux progressions*

$$\left.\begin{array}{l} +2. -4. +8. -16 \\ -2. +4. -8. +16 \end{array}\right\}$$ *soient des progressions géométriques. En effet, dans une prog. géométr. le premier terme doit être au second, comme le second au troisieme, & ainsi de suite. Or, on ne peut dire que + 2 soit à — 4, comme — 4 est à + 8, à moins qu'on ne fasse abstraction des signes ; puisque 2 étant plus grand que zéro, à plus forte raison que — 1, & à plus forte raison que — 4 ; tout au contraire — 4 est moindre que 1, & à plus forte raison que + 8. Si un problême sur les progressions conduisoit à trou-*

ver que cette progression a un exposant négatif, je crois qu'il seroit fondé à la regarder impossible, tout de même que si on eût trouvé une expression imaginaire. En effet, lorsqu'on a un exposant positif comme 2, on voit clairement que cela signifie que chaque terme est égal à 2 fois le précédent; mais quel sens donner à cette expression, que chaque terme est égal à — 2 fois le précédent?

Au reste, cela m'a paru affecter peu la discussion que fait Monsieur Tricano fils, de la possibilité des logarithmes des quantités négatives.

RÉPONSE. L'objection de M*** sur l'impossibilité de la proportion 1 : — 2 : : — 2 : 4, & par conséquent de la progression. ∸ 1, — 2, 4, — 8, 16, — 32, &c. très-forte en elle-même, l'est d'autant plus dans cette circonstance, qu'en répondant, dans sa première Note, à M. d'Alembert, il a avancé, sous le nom de Leibnitz, mais comme vraie, l'objection même de M***: de sorte que, si l'envie d'y répondre le faisoit se rétracter, il se trouveroit d'un autre côté avoir tort avec M. d'Alembert. Tel est en effet le raisonnement de ce dernier — 2 *n'est pas au-dessous de zéro, puisque* 1 : — 2 : : — 2 : 4, & l'objection de M.*** est au contraire — 2 *est une quantité au-dessous de zéro, donc* 1 *n'est pas à* — 2 : — 2 : 4.

Voici comment il croit pouvoir tout concilier, même en soutenant comme vrai le sentiment de Leibnitz.

D'abord il soutient avec M.*** que — 2 est une quantité plus petite que zéro.

En second lieu, il répond à M. d'Alembert, qu'il est faux qu'il ne puisse pas y avoir le même rapport géométrique du plus au moins que du moins au plus, & il le prouve dans la premiere Note de son Mémoire par cette équation $ab = ab - 4ab + 4ab$; d'où $ab = (a - 2a) \times (b - 2b)$, d'où cette proportion $a : a - 2a : : b - 2b : b$, dans laquelle le premier terme est évidemment plus grand que le second, & le 3e au contraire plus petit que le 4e.

En troisieme lieu, il dit, avec M*** & avec Leibnitz, qu'il n'y a point de rapport, à proprement parler, d'une quantité positive à une négative, parce que *rationum verarum fundamentum est rerum similitudo*: ainsi, à

rigoureusement parler, il ne peut pas plus y avoir de rapport entre + 1 & — 1, qu'entre un arbre & un cheval, considérés l'un & l'autre comme êtres.

Il ajoute cependant, avec Leibnitz, *etsi in calculo hac, ut alia imaginaria, tutò & utiliter adhibeantur*; (car ce *hac* se rapporte aux rapports, & non pas aux quantités négatives, comme l'a traduit M. d'Alembert); ainsi on peut dire, avec sûreté dans le calcul, 1 : — 2 :: — 2 : 4, tout comme on dit $1 : \sqrt{-2} :: \sqrt{-2} : -2$.

Pareillement, dans l'exemple ci-dessus, quoiqu'un arbre, en tant qu'arbre, ne puisse pas être comparé à un cheval, en tant qu'animal, on peut très-bien néanmoins les faire entrer dans une Regle de Trois ou dans un calcul quelconque, en ne les considérant que du côté de leur poids ou de leur valeur en argent.

De même, lorsqu'on fait cette prop. 1 : — 2 :: — 2 : 4, on n'entend point dire que 1 est réellement compris dans — 2, ni que — 2 soit renfermé dans + 4, mais qu'en divisant — 2 par + 1, & + 4 par — 2, on aura le même quotient; ou que — 2 est fait de + 1 multiplié par la raison quelconque x, & que + 4 est fait de la même raison x multipliée par — 2.

D'où il conclud que cette raison x peut être un nombre positif ou négatif, suivant que le dividende & le diviseur auront les mêmes signes ou des signes différens: & cela n'implique pas plus de contradiction que de dire dans une équation du second degré qui donne pour résultat $x = \pm\sqrt{4}$, que $x = + 2$ ou $- 2$.

Il croit donc qu'on peut, qu'on doit même admettre dans le calcul des progressions dont la raison est négative.

Mais, objecte M. *** *quel sens donner à cette expression que chaque terme est égal à — 2 le précédent?*

Il semble à M. Trincano fils qu'on répond parfaitement à cette objection, en faisant cette question: *qu'est-ce que — 2 fois un nombre?* Car si on donne à cette derniere expression un sens exact, celle-ci en aura pareillement un: *Une progression dont la raison est négative, — 2, par exemple, est celle dans laquelle chaque terme est égal à — 2 fois le précédent.*

Mais comme objecter soi-même, n'est pas résoudre l'objection qui nous est proposée, il va tâcher de dénouer la difficulté en développant ce qu'on doit entendre par — 2 *fois un nombre*, & pour cela il va commencer par faire voir en peu de mots ce que c'est que ce — 2 qui multiplie.

Qu'est-ce qu'une quantité négative arithmétique? Rien autre chose absolument qu'une simple abstraction. Comment en effet est-on venu aux quantités négatives arithmétiques? En ôtant d'un nombre quelconque un nombre plus grand. Or, comme il est clair qu'on ne peut pas faire complétement cette opération (puisqu'on ne peut ôter que ce qui existe), on ne peut avoir le résultat exact qu'en faisant une opération factice dont le produit par conséquent n'est qu'une pure abstraction.

Ainsi — 2 est une quantité purement intellectuelle qui n'exprime pas un être, & dont la propriété est d'absorber autant d'unités réelles qu'elle en exprime de négatives; parce qu'elle est d'autant d'unités au-dessous de zéro, qu'en contient le chiffre ou le nombre précédé du signe —.

De-là ajouter à un nombre cette quantité — 2, c'est en diminuer deux unités.

De-là ôter — 2 d'un nombre, c'est en ôter une quantité qui y absorboit 2 unités, & par conséquent lui rendre ces deux unités absorbées.

De-là multiplier un nombre positif par un négatif, c'est absorber autant de fois le nombre positif qu'il y a d'unités dans ce nombre négatif, ou autant d'unités qu'il y en a dans le produit des 2 nombres, abstraction faite des signes.

De-là multiplier un nombre négatif par un négatif, c'est absorber autant de fois le premier nombre négatif, qu'il y a d'unités dans le 2ᵉ. Mais ce premier nombre négatif absorboit autant d'unités qu'il en contenoit, abstraction faite du signe Donc c'est détruire autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, un nombre qui absorboit le nombre d'unités qui le représente, ou reproduire autant de fois ce nombre qui étoit détruit: c'est-à-dire, qu'on doit avoir un produit positif égal à celui qu'auroient donné les deux nombres, abstraction faite des signes.

Ainsi multiplier un nombre par — 2, c'est trouver un nombre qui détruise 2 fois ce nombre.

Ainsi une progression qui a pour raison — 2, est une progression dont chaque terme exprime un nombre capable de détruire le double de celui qui le précède.

Ainsi dans la prog. ÷ 1, — 2, 4, — 8, 16, &c.
on aura le 2e terme — 2 + (2 fois le 1er 1) = 0
& + 4 + (— 2 × 2) = 0
— 8 + (+ 4 × 2) = 0
+ 16 + (— 8 × 2) = 0
&c.

Tout ce que M. Trincano fils vient de dire des quantités négatives ne doit s'entendre que des quantités arithmétiques; celles géométriques sont aussi réelles que les positives : il prétend même qu'on peut quelquefois construire les quantités imaginaires. Il en donnoit un exemple dans le Mémoire qu'il a envoyé, il y a plusieurs années, à l'Académie d'Angers, & dont il a perdu l'original.

Au reste, comme l'a très-bien remarqué M. ***, quand même on lui refuseroit l'existence des progressions géométriques, dont la raison est négative, cela ne feroit rien à la suite de son Mémoire. Ces deux progressions ont cela de commun avec les imaginaires que, comme le dit M. ***, elles ne peuvent se construire, ainsi que je l'ai fait voir dans la deuxieme note de mon Mémoire.

Cependant, quoiqu'elles ne puissent répondre à aucune logarithmique, si on fait correspondre à celle qui commence par + 1, une progression arithmétique qui commence par zéro, ces deux progressions auront toutes les propriétés des logarithmiques. Soit, *par exemple*,

la progression géométr. +1, —2, +4, —8, +16, —32, +64 &c.
à laquelle on fait répondre la prog. arithmét. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c.
on aura,

$$1^{o}.\ l.(-2)+l.(+4)=l.(-8)\ \&\ l.(-2)+l.(-8)=l.(+16)$$

$$2^{o}.\ l.(-8)-l.(-2)=l.(+4)\ \&\ l.(+16)-l.(-8)=l.(-2)$$

$$3^{o}.\ l.\sqrt{64}=\frac{l.(64)}{2}=l.(-8)\ \&\ l.\sqrt{16}=l.(+4)$$

$$4^{o}.\ l.\sqrt[3]{-8}=\frac{l(-8)}{3}=l.(-2)\ \&\ l.\sqrt[3]{64}=l.(+4)$$

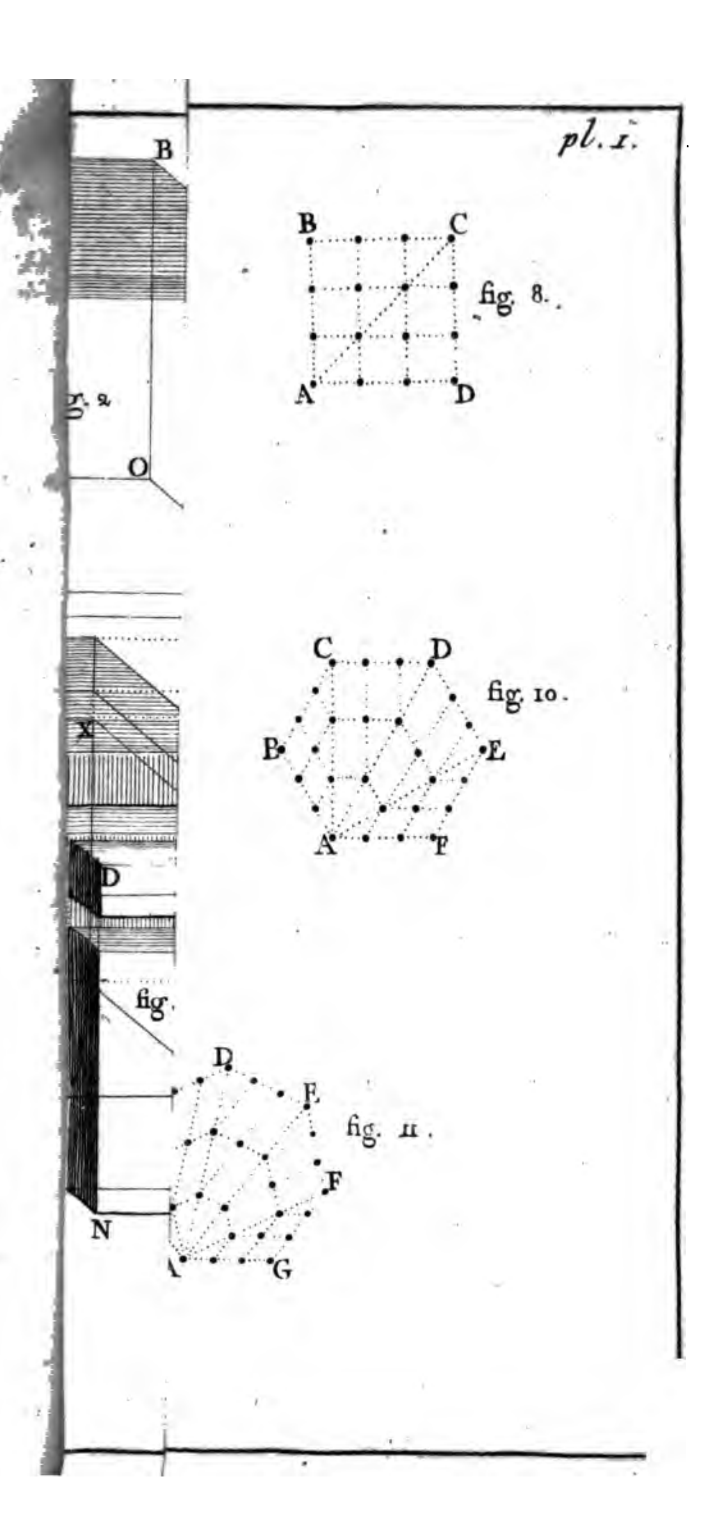
Les progressions qui ont une raison négative ont cela de particulier, qu'on ne peut pas y intercaler de termes par le moyen des moyennes porportionnelles, parce que tous ces termes intermédiares seroient imaginaires. Ils seroient ici $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-8}$, $\sqrt{-32}$ &c.

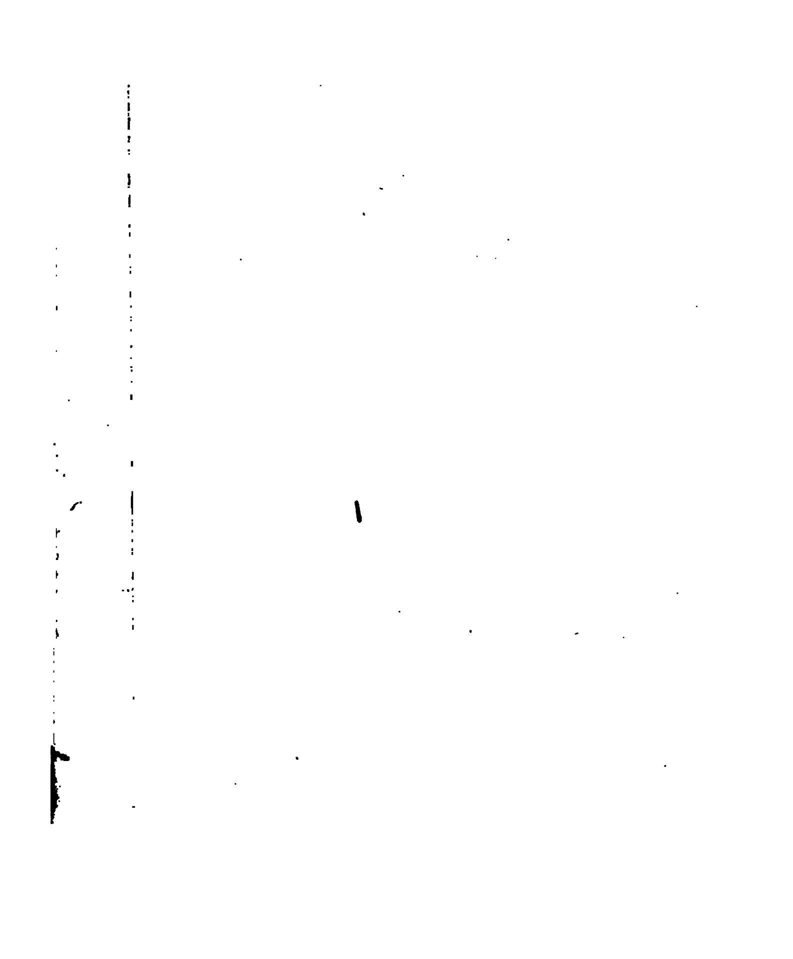
Telles sont les raisons pour lesquelles M. Trincano fils a cru ne devoir pas omettre dans son Mémoire les progressions dont les termes sont alternativement positifs ou négatifs, ou, pour mieux dire, telles sont les réponses qu'il croit pouvoir faire à l'observation de M.***. Il desire sincérement qu'elles aient son approbation, parce qu'alors il sera certain de n'avoir rien à craindre de la critique.

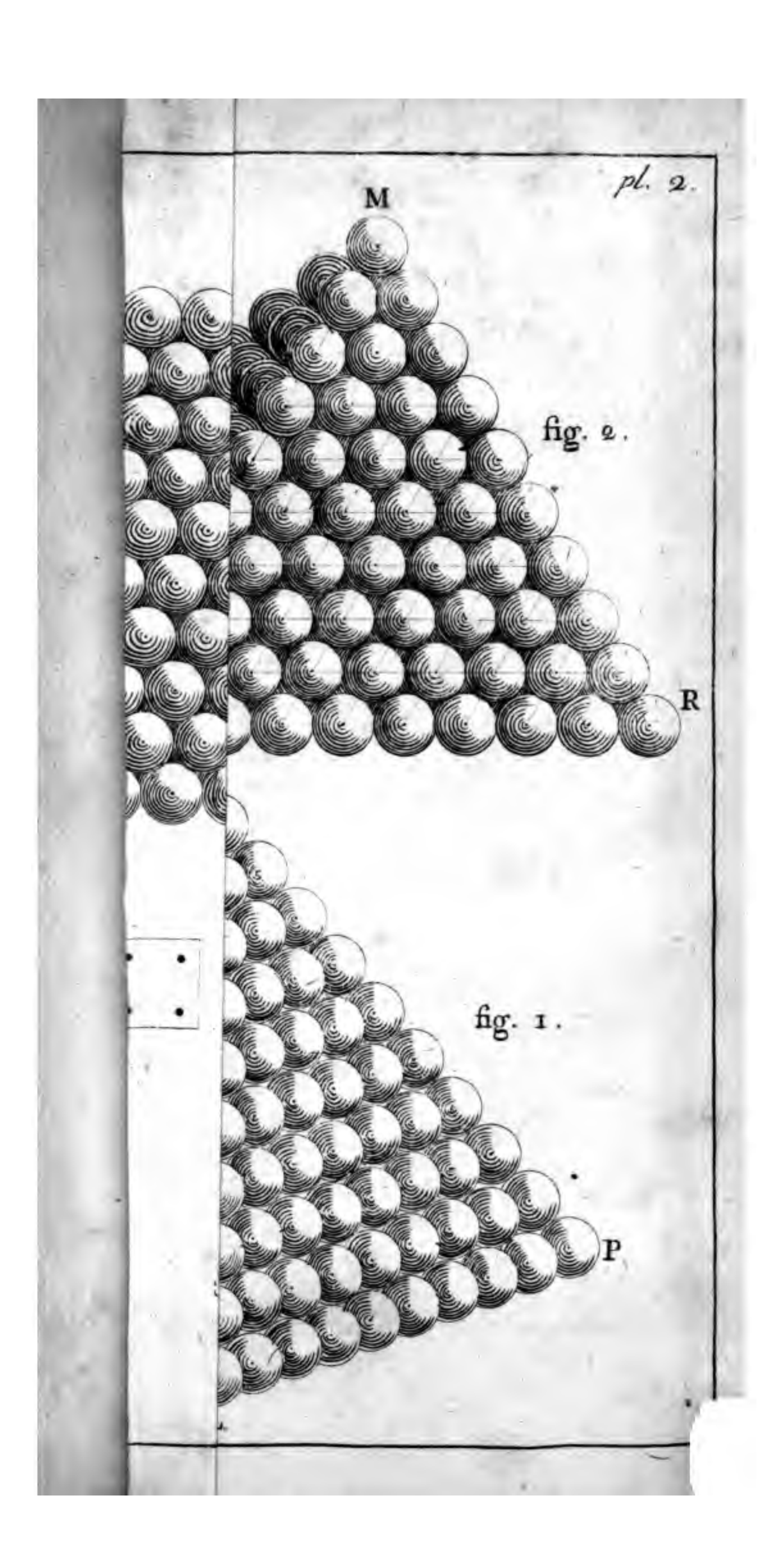
FIN.

AVIS AU RELIEUR.

Le Relieur mettra les deux Planches à la fin de l'Ouvrage, de maniere que les figures sortent en entier hors du Livre.


pl. 1.
B
C
A
D
fig. 8.
O
g. 2
C
D
B
E
A
F
fig. 10.
X
D
fig.
N
D
E
F
A
G
fig. 11.




pl. 2.
M
fig. 2.
R
fig. 1.
P

